Matematyka dla Ciekawych Świata, 2012/2013

Laboratorium 4 — Całkowanie

1*. Liczby harmoniczne. Napisz procedurę `harmoniczna(n)`, która oblicza n-tą liczbę harmoniczną H_n. Liczby harmoniczne są zdefiniowane jako:

$$H_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n},$$

lub w bardziej matematycznym zapisie

$$H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$

Przetestuj swoją procedurę:

```
-->harmoniczna(3)
 ans  =

    1.8333333
```

Wskazówka. W rozwiązaniu zadania przydatny jest operator potęgowania. Komendą `x^n` można podnieść każdy element wektora `x` do dowolnej potęgi `n`, także ujemnej.

2*. Prostokąty pod krzywą.** Narysuj wykres funkcji

$$f(x) = x^5$$

i prostokąty przybliżające pole pod krzywą dla tej funkcji. Wykorzystaj siatkę od 0 do 1 z krokiem `delta_x`=0.1.

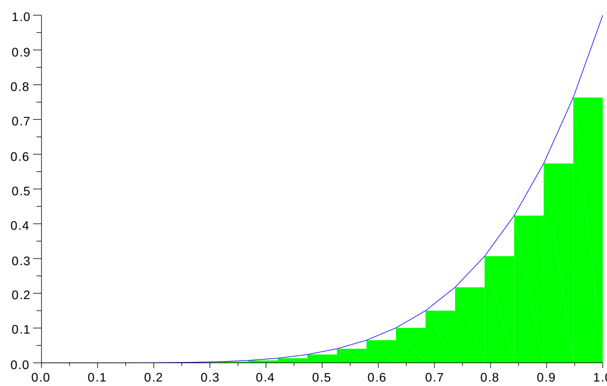
Wskazówka 1. Do rysowania prostokątów w Scilabie służy polecenie `xrects(m,col)`. Jako parametr należy podać macierz `m=[x; y; w; h]`, składającą się z wektorów wierszowych, gdzie `x` i `y` przechowują współrzędne lewego górnego rogu kolejnych prostokątów, a `h` i `w` przechowują odpowiednio wysokość i szerokość każdego prostokąta. Należy zwrócić uwagę, że ponieważ podajemy współrzędne lewego górnego rogu wysokość liczona jest "w dół"prostokąta. Wektor wierszowy `col` przechowuje kolory kolejnych prostokątów.
Wskazówka 2. Do wygenerowania wektora `u` o identycznym rozmiarze jak `v` zawierającego same liczby `a` można posłużyć się poleceniem:

```
u=a*ones(v)
```

Przykład:

```
-->v=[1:4];
-->u=0.5*ones(v)
u  =

     0.5    0.5    0.5    0.5
```



Rysunek 1: Wynikiem zadania 2. powinien być obrazek podobny do przedstawionego na rysunku.

3. Całkowanie. Dla funkcji danej na siatce od x_1 do x_N z krokiem Δx można podać przybliżony wzór na całkę:

$$\int_{x_1}^{x_N} f(x)\,dx \approx \sum_{i=1}^{N-1} f(x_i)\Delta x.$$

Jest to tzw. *metoda prostokątów.* Napisz procedurę `calkuj_prostokatami(f,delta_x)`, która dla funkcji `f` zadanej na siatce z krokiem `delta_x` obliczy przybliżenie całki metodą prostokątów. Sprawdź swoją procedurę na przykładzie funkcji

$$f(x) = x^5$$

całkowanej na siatce od 0 do 1 z krokiem `delta_x`$=0.1$. Dokładny wynik całkowania wynosi $1/6$. Oblicz wartość bezwzględną różnicy między Twoim wynikiem przybliżonym a wartością dokładną i przypisz ją do zmiennej `blad`. Wypisz jej wartość na ekranie.

4. Systematyczne badanie całkowania numerycznego. Wykonaj całkowanie z poprzedniego zadania dla całej listy kroków siatki:

```
wektor_delta_x=[0.01, 0.001, 0.0001, 1.0e-5, 1.0e-6].
```

Za każdym razem wyznacz wartość błędu i wypisz go.

5. **Zależność błędu od rozmiaru kroku siatki.** Wykonaj wykres zależności błędu całkowania od rozmiaru kroku siatki. W tym celu zamiast za każdym razem wypisywać wartość zmiennej `blad`, dodawaj ją do wektora `wektor_bledy`. Wykonaj wykres w skali logarytmicznej. Co obserwujesz?

   Wskazówka 1. Do dowolnego wektora `x` nowy element dodajemy wykonując

   ```
   x = [ x, nowy_element ]
   ```

   Wskazówka 2. Pusty wektor tworzymy w Scilabie pisząc:

   ```
   x = [ ]
   ```

6. **Nachylenie prostej.** Napisz procedurę `nachylenie()`, która wyznaczy nachylenie prostej przechodzącej przez dwa wskazane przez użytkownika punkty. Procedura powinna poczekać na kliknięcie w dwóch punktach na wykresie, następnie narysować linię łączącą te punkty. Wynikiem działania procedury powinien być tangens nachylenia prostej przechodzącej przez wskazane przez użytkownika punkty. Wykorzystaj procedurę `nachylenie()` do wyznaczenia nachylenia zależności błędu całkowania od długości kroku całkowania narysowanych w skali logarytmicznej.

   Wskazówka Wykorzystaj funkcję `xclick()`, która wywołana przez

   ```
   [buttons,x,y]=xclick();
   ```

   zwróci współrzędne punktu wybranego przez użytkownika w zmiennych `x` i `y`.

7**. **Całkowanie metodą trapezów.** Popraw swój program, który powstał po rozwiązaniu zadań 3-6 tak, aby całkował dokładniejszą *metodą trapezów*:

$$\int_{x_1}^{x_N} f(x)\, dx \approx \sum_{i=1}^{N-1} \frac{1}{2} \left(f(x_i) + f(x_{i+1})\right) \Delta x.$$

Oblicz zależność błędu od kroku całkowania, analogicznie jak to było w zadaniu 5. Wyznacz nachylenie zależności błędu od długości kroku całkowania w skali logarytmicznej analogicznie do przypadku metody prostokątów w zadaniu 6.