

Co to jest wyznacznik macierzy?

Matematyka dla ciekawych świata XVII

Daniel Laskowski

18 maja 2026

Ze szkoły znamy

$$W = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = \det \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = 2 \cdot (-1) - 1 \cdot 1 = -3$$

$$\begin{cases} 2x + y = 3 \\ x - y = 1 \end{cases}$$

$$W_x = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -3 - 1 = -4$$

$$W_y = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 - 3 = -1$$

$$\begin{cases} x = \frac{W_x}{W} = \frac{-4}{-3} = \frac{4}{3} \\ y = \frac{W_y}{W} = \frac{-1}{-3} = \frac{1}{3} \end{cases}$$

Ze szkoły może znamy

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -4 \end{vmatrix} = -4 + 20 + 3 - (-5) - (-2) - (-24)$$

Wyznacznik macierzy

Oznaczenie pomocnicze

Oznaczmy przez A_{ij} macierz powstałą przez usunięcie z macierzy A i -tego wiersza i j -tej kolumny.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

$$A_{23} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 8 \end{pmatrix}$$

Wyznacznik macierzy

Oznaczenie pomocnicze

Oznaczmy przez A_{ij} macierz powstałą przez usunięcie z macierzy A i -tego wiersza i j -tej kolumny.

Definicja (wyznacznik)

Wyznacznikiem macierzy nazywamy funkcję, która kwadratowej macierzy

$A \in M_{n,n}(\mathbb{R})$, w której: $A := \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix}$ przypisuję liczbę

$\det A$ równą:

1° a , jeśli $A = \begin{pmatrix} a \end{pmatrix}$,

Wyznacznik macierzy

Oznaczenie pomocnicze

Oznaczmy przez A_{ij} macierz powstałą przez usunięcie z macierzy A i -tego wiersza i j -tej kolumny.

Definicja (wyznacznik)

Wyznacznikiem macierzy nazywamy funkcję, która kwadratowej macierzy

$A \in M_{n,n}(\mathbb{R})$, w której: $A := \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix}$ przypisuję liczbę

$\det A$ równą:

1° a , jeśli $A = \begin{pmatrix} a \end{pmatrix}$,

2° $a_{1,1} \det A_{1,1} - a_{1,2} \det A_{1,2} + a_{1,3} \det A_{1,3} - \dots \pm a_{1,n} \det A_{1,n}$.

$$a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$$

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{vmatrix} = a_{11} \det(a_{22}) - a_{12} \det(a_{21}) =$$
$$= a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$$

Przykład może szkolny

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{vmatrix} = a_{1,1} \cdot \det \begin{pmatrix} a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,2} & a_{3,3} \end{pmatrix} - a_{1,2} \cdot \det \begin{pmatrix} a_{2,1} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,3} \end{pmatrix} +$$

$$+ a_{1,3} \det \begin{pmatrix} a_{2,1} & a_{2,2} \\ a_{3,1} & a_{3,2} \end{pmatrix} = a_{1,1} (a_{2,2} \cdot a_{3,3} - a_{2,3} a_{3,2}) - a_{1,2} (a_{2,1} a_{3,3} - a_{2,3} a_{3,1}) +$$

$$+ a_{1,3} (a_{2,1} a_{3,2} - a_{2,2} a_{3,1})$$

Metoda wygodna

Wyznacznik macierzy trójkątnej

Jeśli macierz A jest górnotrójkątna (lub dolnotrójkątna) to jej wyznacznik jest iloczynem elementów leżących na jej diagonalu.

$$A = \begin{pmatrix} * & & \\ 0 & * & \\ & & * \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} * & & 0 \\ & * & \\ & & * \end{pmatrix}$$

Wyznacznik macierzy trójkątnej

Jeśli macierz A jest górnotrójkątna (lub dolnotrójkątna) to jej wyznacznik jest iloczynem elementów leżących na jej diagonalu.

Wyznacznik a operacje elementarne

Niech B będzie macierzą powstałą w wyniku wykonania operacji elementarnej na wierszach macierzy A . Wówczas:

- jeśli B powstała po zamianie wierszy A , to $\det B = -\det A$,

Wyznacznik macierzy trójkątnej

Jeśli macierz A jest górnotrójkątna (lub dolnotrójkątna) to jej wyznacznik jest iloczynem elementów leżących na jej diagonalu.

Wyznacznik a operacje elementarne

Niech B będzie macierzą powstałą w wyniku wykonania operacji elementarnej na wierszach macierzy A . Wówczas:

- jeśli B powstała po zamianie wierszy A , to $\det B = -\det A$,
- jeśli B powstała poprzez pomnożenie wiersza A przez $c \in \mathbb{R}$, to $\det B = \frac{1}{c} \det A$,

$$\begin{vmatrix} 2 & 4 & 8 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

Wyznacznik macierzy trójkątnej

Jeśli macierz A jest górnotrójkątna (lub dolnotrójkątna) to jej wyznacznik jest iloczynem elementów leżących na jej diagonalu.

Wyznacznik a operacje elementarne

Niech B będzie macierzą powstałą w wyniku wykonania operacji elementarnej na wierszach macierzy A . Wówczas:

- jeśli B powstała po zamianie wierszy A , to $\det B = -\det A$,
- jeśli B powstała poprzez pomnożenie wiersza A przez $c \in \mathbb{R}$, to $\det B = \frac{1}{c} \det A$,
- jeśli B powstała poprzez odejmowanie wierszy w macierzy A (nawet przemnożonych!), $\det B = \det A$.

Przykład

$$\begin{aligned} & \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 7 & 4 \\ 2 & 7 & 8 & 7 \\ 3 & 6 & 11 & 9 \end{vmatrix} \begin{array}{l} W_2 - 2W_1 \\ W_3 - 2W_1 \\ \hline W_4 - 3W_1 \end{array} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 2 & 6 \end{vmatrix} \begin{array}{l} W_2 \leftrightarrow W_3 \\ \hline \end{array} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 6 \end{vmatrix} \begin{array}{l} W_4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right) \\ \hline \end{array} \\ & = -2 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{vmatrix} \begin{array}{l} W_4 - W_3 \\ \hline \end{array} = -2 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -2 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 1 = -6 \end{aligned}$$

Macierz odwrotna $\Rightarrow \det \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix} = \underline{1}$

Definicja (macierz odwrotna) $\mathcal{L} = \det(A \cdot A^{-1}) = \det(A) \cdot \det(A^{-1}) = 0$

Niech A będzie macierzą kwadratową taką, że $\det A \neq 0$. Macierzą odwrotną nazywamy wówczas macierz A^{-1} taką, że:

$$AA^{-1} = A^{-1}A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \textcolor{red}{1} \end{pmatrix} \quad / \det$$

Tw. Cauchy'ego

$$\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B)$$

Macierz odwrotna

Definicja (macierz odwrotna)

Niech A będzie macierzą kwadratową taką, że $\det A \neq 0$. Macierzą odwrotną nazywamy wówczas macierz A^{-1} taką, że:

$$AA^{-1} = A^{-1}A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}}_A \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & -1 \\ -2 & -1 & 1 \end{pmatrix}}_{A^{-1}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Jak szukać macierzy odwrotnych?

$$\begin{pmatrix} 5 & 7 & 1 \\ 5 & 2 & 0 \\ 9 & 9 & 1 \end{pmatrix}$$

Jak szukać macierzy odwrotnych?

$$\begin{aligned}
 & \xrightarrow{\omega_2:2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{5}{2} & -2 & \frac{5}{2} \\ 0 & -5 & -1 & -1 & 1 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{\omega_3+5\omega_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{5}{2} & -2 & \frac{5}{2} \\ 0 & 0 & -1 & -\frac{27}{2} & -9 & \frac{25}{2} \end{array} \right) \xrightarrow{\omega_3 \cdot (-1)} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{5}{2} & -2 & \frac{5}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{27}{2} & 9 & -\frac{25}{2} \end{array} \right) \\
 & \left(\begin{array}{ccc|ccc} 5 & 7 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 5 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 9 & 9 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow[\omega_3-2\omega_1]{\omega_2-\omega_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 5 & 7 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & -5 & -1 & -2 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{\omega_3-\omega_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 5 & 7 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{\omega_1 \leftrightarrow -\omega_3} \\
 & \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 5 & 7 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & -1 & -1 & 1 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{\omega_2-5\omega_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 7 & 1 & -4 & -5 & 5 \\ 0 & -5 & -1 & -1 & 1 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{\omega_3+\omega_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & -5 & -4 & 5 \\ 0 & -5 & -1 & -1 & 1 & 0 \end{array} \right)
 \end{aligned}$$

Jak szukać macierzy odwrotnych?

$$\begin{pmatrix} 5 & 7 & 1 \\ 5 & 2 & 0 \\ 9 & 9 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 5 & 7 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 5 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 9 & 9 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

$$\begin{pmatrix} 5 & 7 & 1 \\ 5 & 2 & 0 \\ 9 & 9 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -\frac{5}{2} & -2 & \frac{5}{2} \\ \frac{27}{2} & 9 & -\frac{25}{2} \end{pmatrix}$$

Gdzie jest układ równań?

$$\begin{cases} 5x_1 + 7x_2 + x_3 = 3 \\ 5x_1 + 2x_2 = -1 \\ 9x_1 + 9x_2 + x_3 = 2 \end{cases}$$

Gdzie jest układ równań?

$$5x = 2 \quad | \cdot \frac{1}{5}$$

$$\begin{cases} 5x_1 + 7x_2 + x_3 = 3 \\ 5x_1 + 2x_2 = -1 \\ 9x_1 + 9x_2 + x_3 = 2 \end{cases}$$

$$\frac{1}{5} \cdot 5x = 2$$

$$\begin{pmatrix} 5 & 7 & 1 \\ 5 & 2 & 0 \\ 9 & 9 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad / \quad A^{-1}$$

$$\begin{pmatrix} 5x_1 + 7x_2 + x_3 \\ 5x_1 + 2x_2 + 0x_3 \\ 9x_1 + 9x_2 + x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Gdzie jest układ równań?

$$\begin{cases} 5x_1 + 7x_2 + x_3 = 3 \\ 5x_1 + 2x_2 = -1 \\ 9x_1 + 9x_2 + x_3 = 2 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 5 & 7 & 1 \\ 5 & 2 & 0 \\ 9 & 9 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -\frac{5}{2} & -2 & \frac{5}{2} \\ \frac{27}{2} & 9 & -\frac{25}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{2} \\ 13 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{2} \\ 13 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Gdzie jest układ równań?

$$\begin{cases} 5x_1 + 7x_2 + x_3 = 3 \\ 5x_1 + 2x_2 = -1 \\ 9x_1 + 9x_2 + x_3 = 2 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 5 & 7 & 1 \\ 5 & 2 & 0 \\ 9 & 9 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -\frac{5}{2} & -2 & \frac{5}{2} \\ \frac{27}{2} & 9 & -\frac{25}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{2} \\ \frac{13}{2} \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} x_1 &= 0 \\ x_2 &= -\frac{1}{2} \\ x_3 &= \frac{13}{2} \end{aligned}$$

Gdzie jest układ równań?

$$\begin{cases} 5x_1 + 7x_2 + x_3 = 3 \\ 5x_1 + 2x_2 = -1 \\ 9x_1 + 9x_2 + x_3 = 2 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 5 & 7 & 1 \\ 5 & 2 & 0 \\ 9 & 9 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -\frac{5}{2} & -2 & \frac{5}{2} \\ \frac{27}{2} & 9 & -\frac{25}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{2} \\ \frac{13}{2} \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = -\frac{1}{2} \\ x_3 = \frac{13}{2} \end{cases}$$