

Jak narysować krzywą z prostych?

Matematyka dla ciekawych świata XVII

Krzysztof Lasocki

27 kwietnia 2026

Opis parametryczny odcinka
Krzywe Béziera

Opis parametryczny odcinka

Czym różnią się te dwa zdania?

Idę z domu do szkoły, przeszedłem 5km

Jestem w $\frac{2}{3}$ drogi do szkoły

Opis parametryczny odcinka

Opis odcinka - dwa punkty A , B

Jak opisać punkty znajdujące się na odcinku?

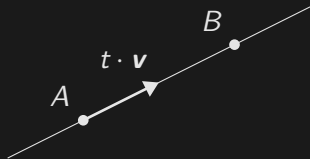
Opis parametryczny odcinka

Opis odcinka - dwa punkty A , B

Jak opisać punkty znajdujące się na odcinku? Punkty na odcinku prostej leżą również na tej prostej.

Możemy opisać punkt jako początek + wektor równoległy do prostej:

$$P = A + t \cdot v$$



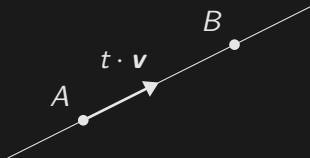
Opis parametryczny odcinka

Opis odcinka - dwa punkty A , B

Jak opisać punkty znajdujące się na odcinku? Punkty na odcinku prostej leżą również na tej prostej.

Możemy opisać punkt jako początek + wektor równoległy do prostej:

$$P = A + t \cdot v$$



Jak długi jest wektor? Jak dobrać wartość t aby trafić w dany punkt?

Opis parametryczny odcinka

Opis odcinka - dwa punkty A , B . Punkt P na odcinku to:

$$P = A + t \cdot \mathbf{v}$$

Ustalamy $\mathbf{v} = AB$, to znaczy, wektor $\mathbf{v}$ zaczepiony w A pokrywa się z odcinkiem.

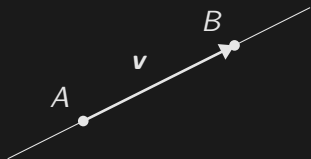
Opis parametryczny odcinka

Opis odcinka - dwa punkty A , B . Punkt P na odcinku to:

$$P = A + t \cdot \mathbf{v}$$

Ustalamy $\mathbf{v} = AB$, to znaczy, wektor $\mathbf{v}$ zaczepiony w A pokrywa się z odcinkiem.

$$P = A + \mathbf{v} = B$$



Ustaliliśmy jednostki! Odcinek ma zawsze długość 1 $[\mathbf{v}]$, wektor będący jego częścią ma długość t .

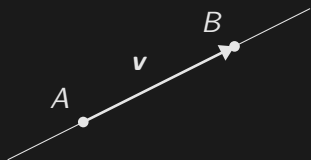
Opis parametryczny odcinka

Opis odcinka - dwa punkty A , B . Punkt P na odcinku to:

$$P = A + t \cdot \mathbf{v}$$

Ustalamy $\mathbf{v} = AB$, to znaczy, wektor $\mathbf{v}$ zaczepiony w A pokrywa się z odcinkiem.

$$P = A + \mathbf{v} = B$$



Ustaliliśmy jednostki! Odcinek ma zawsze długość 1 $[\mathbf{v}]$, wektor będący jego częścią ma długość t .

Środek odcinka:

$$P = A + 0.5 \cdot \mathbf{v}$$

Opis parametryczny odcinka

Wprowadzamy parametr $t \in \langle 0, 1 \rangle$ na podstawie którego będziemy liczyć wartości współrzędnych punktów (x, y) .

Innymi słowy, wprowadzamy funkcje:

$$x(t) : \langle 0, 1 \rangle \rightarrow \mathbb{R}$$

$$y(t) : \langle 0, 1 \rangle \rightarrow \mathbb{R}$$

A nasz wektor to będzie

$$\mathbf{v}(t) = [x(t), y(t)] \tag{1}$$

Opis parametryczny odcinka

Wprowadzamy parametr $t \in \langle 0, 1 \rangle$ na podstawie którego będziemy liczyć wartości współrzędnych punktów (x, y) .

Innymi słowy, wprowadzamy funkcje:

$$x(t) : \langle 0, 1 \rangle \rightarrow \mathbb{R}$$

$$y(t) : \langle 0, 1 \rangle \rightarrow \mathbb{R}$$

A nasz wektor to będzie

$$\mathbf{v}(t) = [x(t), y(t)] \quad (1)$$

Przykład: Odcinek od $x = 1$ do $x = 3$ na prostej $y = x/2 + 1$

Opis parametryczny odcinka

Przykład: Odcinek od $x = 1$ do $x = 3$ na prostej $y = x/2 + 1$

Ustalamy $x(t)$:

$$x(0) = 1$$

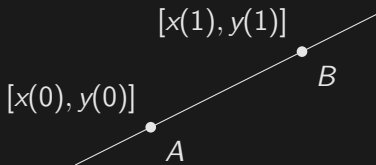
$$x(1) = 3$$

$$x(t) = at + b$$

/* $x(t)$ ma być liniowe */

$$x(t) = 1 + (3 - 1) \cdot t = 1 + 2t$$

Teraz możemy znaleźć $y(t)$:



Opis parametryczny odcinka

Przykład: Odcinek od $x = 1$ do $x = 3$ na prostej $y = x/2 + 1$

Ustalamy $x(t)$:

$$x(0) = 1$$

$$x(1) = 3$$

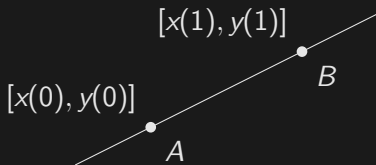
$$x(t) = at + b$$

/* $x(t)$ ma być liniowe */

$$x(t) = 1 + (3 - 1) \cdot t = 1 + 2t$$

Teraz możemy znaleźć $y(t)$:

$$y(t) = (1 + 2t) / 2 + 1 = 3/2 + t$$



Opis parametryczny odcinka

Przykład: Odcinek od $x = 1$ do $x = 3$ na prostej $y = x/2 + 1$

Otrzymujemy opis odcinka w formie parametrycznej:

$$\begin{cases} x(t) = 1 + 2t \\ y(t) = 3/2 + t \end{cases}$$

Opis parametryczny odcinka

Przykład: Odcinek od $x = 1$ do $x = 3$ na prostej $y = x/2 + 1$

Otrzymujemy opis odcinka w formie parametrycznej:

$$\begin{cases} x(t) = 1 + 2t \\ y(t) = 3/2 + t \end{cases}$$

Co daje nam taki opis?

Opis parametryczny odcinka

Przykład: Odcinek od $x = 1$ do $x = 3$ na prostej $y = x/2 + 1$

Otrzymujemy opis odcinka w formie parametrycznej:

$$\begin{cases} x(t) = 1 + 2t \\ y(t) = 3/2 + t \end{cases}$$

Co daje nam taki opis?

- Rozłączyliśmy zależność $x(y)$, teraz obie zmienne zależą od t
- Możemy wyznaczyć współrzędne punktów na odcinku jako wektor $\mathbf{v}(t) = [x(t), y(t)]$
- Możemy opisać odcinek pionowy (na prostej $x = C$)

Opis parametryczny odcinka

Opis parametryczny odcinka

Odcinek między punktami A oraz B można opisać parametrem t w następujący sposób:

$$P(t) = A + t \cdot \mathbf{v} \quad \text{dla} \quad t \in \langle 0, 1 \rangle \quad (2)$$

Pod równaniem (??) kryje się układ równań opisujący każdą współrzędną. Odcinek tworzą wszystkie punkty opisane przez to równanie.

Istnieje tylko jeden odcinek między dwoma punktami¹.

¹w normalnych warunkach, tzn. w geometrii płaszczyzny

Krzywe Béziera

Istnieje tylko jeden odcinek między dwoma punktami¹.
Ale jest dużo więcej sposobów na ich połączenie krzywą.

Jak je opisać?

¹w normalnych warunkach, tzn. w geometrii płaszczyzny

Krzywe Béziera

Istnieje tylko jeden odcinek między dwoma punktami¹.
Ale jest dużo więcej sposobów na ich połączenie krzywą.

Jak je opisać?

Chcemy wymodelować krzywą, która łączy dwa punkty, a jej kształt jest sterowany przez jeden lub więcej punktów poza nią (**punkty kontrolne**).
Mówimy, że krzywa opisana n punktami to krzywa $n - 1$ stopnia.

Ustawiając położenia punktów kontrolnych wpływamy na kształt krzywej
(Nie jest to jedyny sposób na opis krzywej)

¹w normalnych warunkach, tzn. w geometrii płaszczyzny

Krzywe Béziera

W latach 60. XX wieku problemem rysowania krzywych za pomocą komputerów zajmowało się niezależnie dwóch inżynierów: **Pierre Bézier** oraz **Paul de Casteljau**. Bézier pracował dla Renault, de Casteljau dla Citroëna.

Krzywe Béziera

W latach 60. XX wieku problemem rysowania krzywych za pomocą komputerów zajmowało się niezależnie dwóch inżynierów: **Pierre Bézier** oraz **Paul de Casteljau**. Bézier pracował dla Renault, de Casteljau dla Citroëna.

Obaj matematycy wynaleźli sposób opisu i konstrukcji krzywych szeroko stosowany w komputerowych zastosowaniach matematyki, takich jak projektowanie CAD oraz grafika komputerowa.

Krzywe Béziera

W latach 60. XX wieku problemem rysowania krzywych za pomocą komputerów zajmowało się niezależnie dwóch inżynierów: **Pierre Bézier** oraz **Paul de Casteljau**. Bézier pracował dla Renault, de Casteljau dla Citroëna.

Obaj matematycy wynaleźli sposób opisu i konstrukcji krzywych szeroko stosowany w komputerowych zastosowaniach matematyki, takich jak projektowanie CAD oraz grafika komputerowa.

Ich praca zaowocowała opisem **Krzywych Béziera** oraz **algorytmu de Casteljau** służącemu ich kreśleniu.

Krzywe Béziera



Pierre Bézier



Paul de Casteljau

Krzywe Béziera

Wróćmy do opisu parametrycznego odcinka:

$$P = A + t \cdot v$$

Traktując punkty jako wektory², można podstawić v :

$$P = A + t \cdot (B - A) = A + tB - tA = (1 - t)A + tB \quad (3)$$

Wyrażenie (??) można traktować jako średnią ważoną końców odcinka z wagami $(1 - t)$ oraz t .

Czy możemy rozszerzyć to rozumowanie i “uśrednić” dwa odcinki?

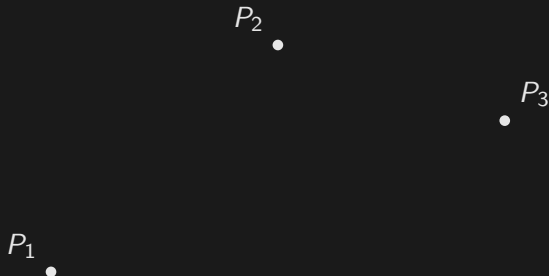
Możemy to zrobić konstrukcyjnie!

²tn. punkt (x, y) jest tożsamy z wektorem (x, y) zaczepionym w $(0, 0)$

Krzywe Béziera

Konstrukcja krzywej 2 stopnia

Wybieramy trzy punkty: P_1 , P_3 – końce krzywej, P_2 - jeden punkt kontrolny (punkt charakterystyczny, sterujący kształtem krzywej):



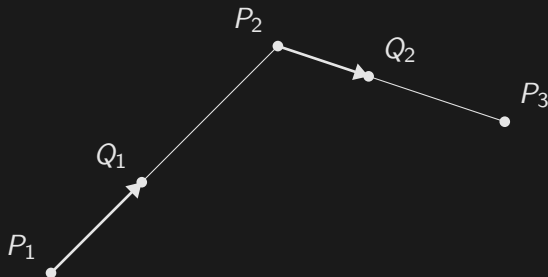
Krzywe Béziera

Konstrukcja krzywej 2 stopnia

Obliczamy średnie ważone końców dla odcinków P_1P_2 i P_2P_3 . W przykładzie $k = 0.4$.

$$Q_1 = (1 - t)P_1 + tP_2$$

$$Q_2 = (1 - t)P_2 + tP_3$$



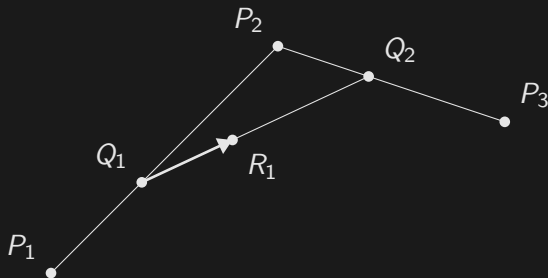
Krzywe Béziera

Konstrukcja krzywej 2 stopnia

To samo rozumowanie stosujemy do nowego odcinka Q_1Q_2 .

Obliczamy średnie ważone końców i otrzymujemy jeden punkt R_1 , który jest punktem na krzywej dla danej wartości parametru k .

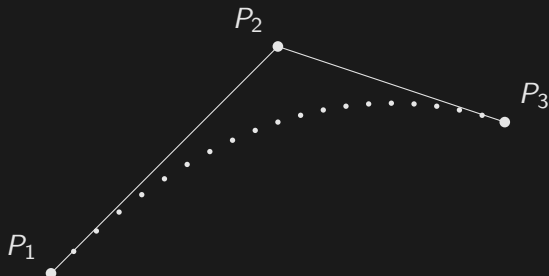
$$R_1 = (1 - t)Q_1 + tQ_2$$



Krzywe Béziera

Konstrukcja krzywej 2 stopnia

Punkty $R(t)$ dla kolejnych t z krokiem 0.05:



Dlaczego z konstrukcji na prostych wychodzi krzywa?

Krzywe Béziera

Konstrukcja krzywej 2 stopnia

Znając wzory na Q_1 oraz Q_2 , możemy je podstawić do wzoru na R_1 który jest punktem na krzywej dla danej wartości parametru k .

$$Q_1 = (1 - t)P_1 + tP_2$$

$$Q_2 = (1 - t)P_2 + tP_3$$

$$R_1 = (1 - t)Q_1 + tQ_2$$

Po podstawieniu dostajemy krzywą parametryczną kwadratową (względem k)

$$R(t) = (1 - t) [(1 - t)P_1 + tP_2] + t[(1 - t)P_2 + tP_3] \quad (4)$$

Można również przekształcić wzór, grupując punkty kontrolne³:

$$R(t) = (1 - t)^2 P_1 + 2t(1 - t) P_2 + t^2 P_3 \quad (5)$$

³jest to postać wyrażona za pomocą wielomianów Bernsteina 

Krzywe Béziera

Krzywe n -tego stopnia

Algorytm jest rekurencyjny. Można wyjść od dowolnej liczby punktów kontrolnych P_n . Każda para kolejnych punktów daje $n - 1$ punktów wyższego rzędu, aż zostaje jeden punkt:

$$Q_n = (1 - t)P_n + tP_{n+1}$$

$$R_n = (1 - t)Q_n + tQ_{n+1}$$

...

$$Z_1 = (1 - t)Y_1 + tY_2$$

Krzywe Béziera

Krzywe n-tego stopnia

Można to obliczyć wykorzystując rekurencyjny algorytm:

```
def rysuj_bezier(punkty, t):  
    N = ilosc punktów  
    jesli N == 1:  
        rysuj_punkt(punkty[0])  
        koniec  
  
    posrednie = []  
    dla i od 0 do N-1:  
        posrednie[i] = (1-t) * punkty[i] + t * punkty[i+1]  
    // tablica posrednie zawiera N-1 punktów  
    rysuj_bezier(posrednie, t)
```

Algorytm narysuje punkt na krzywej takiego stopnia, ile dostanie punktów początkowych.

Krzywe Béziera

Krzywe n -tego stopnia

Przedstawiony sposób konstrukcyjnego rysowania krzywych Béziera to tzw. algorytm **de Casteljau**.

Krzywe Béziera

Krzywe n -tego stopnia

Przedstawiony sposób konstrukcyjnego rysowania krzywych Béziera to tzw. algorytm **de Casteljau**.

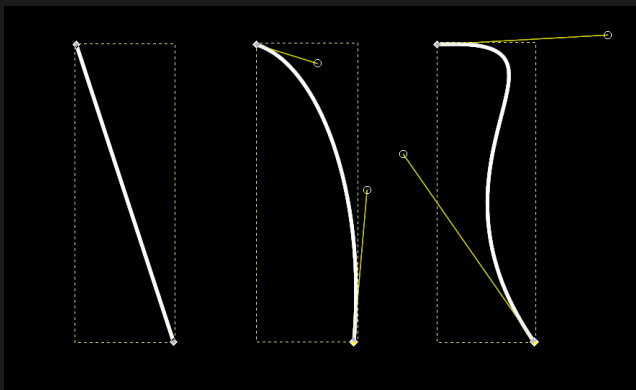
Algorytm ma kilka zalet:

- Jest prosty w implementacji (wymaga tylko operacji liniowych – mnożenia i dodawania)
- Wszystkie wartości wypadają w otocze wypukłej punktów kontrolnych (algorytm nie jest czuły na błędy zaokrągleń)

Krzywe Béziera

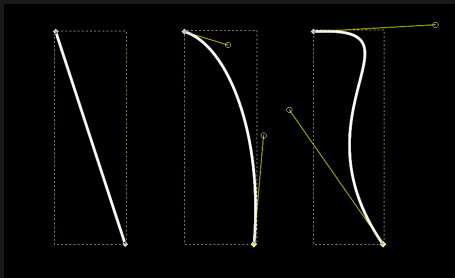
Krzywe n-tego stopnia

W grafice komputerowej w większości zastosowań wystarczą krzywe Béziera 3. stopnia. Opisują je cztery punkty: początek, koniec oraz dwa punkty kontrolne



Krzywe Béziera

Krzywe n-tego stopnia



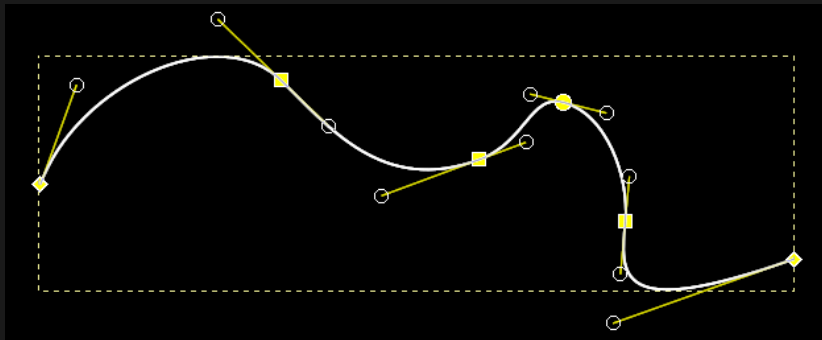
Krzywe 3. stopnia są “wystarczająco dobre”

- Krzywe 2 stopnia są tylko wypukłe
- Krzywe wyższych rzędów mogą być przybliżone kilkoma krzywymi niższych rzędów (nie dokładnie, ale wystarczająco podobnie)
- Krzywe 3 stopnia dają odpowiednią swobodę, a jednocześnie są na tyle proste, aby szybko je policzyć

Krzywe Béziera

Opis skomplikowanego kształtu

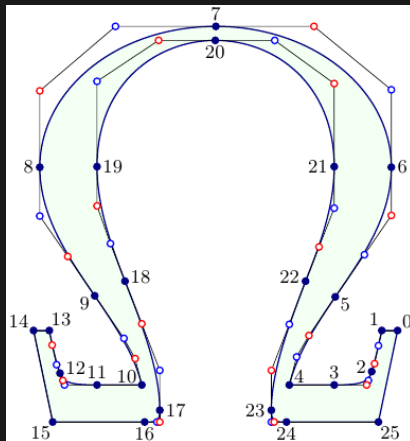
Skomplikowana krzywa opisana jako krzywa sklejana 3. stopnia Béziera:



Zaznaczone punkty końcowe i kontrolne - 2 dla każdej krzywej.

Krzywe Béziera

Opis skomplikowanego kształtu



<https://tex.stackexchange.com/questions/178892/can-i-visualize-the-bezier-control-points-of-a-letter-in-tex>

Krzywe Béziera

Krzywe n -tego stopnia

W ogólności krzywe Béziera mogą opisywać krzywe w dowolnej ilości wymiarów.

W grafice 3D rozwija się je do płatów Béziera, które działają podobnie.

Krzywe Béziera

Jak narysować krzywą?

Rysowanie ciągłych krzywych - przybliżenie łamaną

```
def rysuj_krzywa(v, krok):  
    t = 0  
    while t < 1:  
        poczatek = v(t)  
        t += krok  
        koniec = v(t)  
        rysuj_prosta(poczatek, koniec)
```

Krok algorytmu musi być na tyle mały, aby nie było widać kątów i na tyle duży aby nie liczyć zbyt dużo.

Krzywe Béziera

Jak narysować krzywą?

Rysowanie ciągłych krzywych - przybliżenie łamaną

```
def rysuj_krzywa(v, krok):  
    t = 0  
    while t < 1:  
        poczatek = v(t)  
        t += krok  
        koniec = v(t)  
        rysuj_prosta(poczatek, koniec)
```

Krok algorytmu musi być na tyle mały, aby nie było widać kątów i na tyle duży aby nie liczyć zbyt dużo.

Jak zmienić ten algorytm, aby nie liczyć każdego punktu dwa razy?

Krzywe Béziera

Dla ciekawych

Pytania :) ?

Krzywe Béziera

Dla ciekawych

- Warto zapoznać się z **wielomianami Bernsteina**
- Aby sprawnie obliczać krzywe Béziera, stosuje się **algorytm de Casteljau**
- Bardziej skomplikowane kształty opisuje się sklejając krzywe Béziera do postaci **funkcji sklepanych Béziera** (Bezier splines).
- <https://pomax.github.io/bezierinfo> - super książka internetowa o krzywych beziera