

Przekształcenia afiniczne i współrzędne rzutowe

Wojtek Matusiak

20. kwietnia 2026r.

Czego brakuje przekształceniom liniowym

- Czy możemy obracać?

Czego brakuje przekształceniom liniowym

- Czy możemy obracać?
Tak, **ale** tylko wokół środka układu współrzędnych.
- Czy możemy odbijać symetrycznie

Czego brakuje przekształceniom liniowym

- Czy możemy obracać?
Tak, **ale** tylko wokół środka układu współrzędnych.
- Czy możemy odbijać symetrycznie
Tak, **ale** tylko wzdłuż prostych przechodzących przez środek układu współrzędnych.

Czego brakuje przekształceniom liniowym

- Czy możemy obracać?

Tak, **ale** tylko wokół środka układu współrzędnych.

- Czy możemy odbijać symetrycznie

Tak, **ale** tylko wzdłuż prostych przechodzących przez środek układu współrzędnych.

Ogólny problem: środek układu współrzędnych musi zostać w swoim miejscu.

$$\varphi(\mathbf{0}) = \varphi(\mathbf{0} + \mathbf{0}) = 2\varphi(\mathbf{0}) \Rightarrow \mathbf{0} = \varphi(\mathbf{0})$$

Cel: chcemy wykonać przekształcenie liniowe, ale tak jakby środek układu współrzędnych był w punkcie p (a nie w 0).

Zmiana środka układu

Cel: chcemy wykonać przekształcenie liniowe, ale tak jakby środek układu współrzędnych był w punkcie p (a nie w 0).

- 1 Przesuńmy punkt p do środka układu współrzędnych.
- 2 Wykonajmy przekształcenie liniowe.
- 3 Przesuńmy punkt p z powrotem.

Przykład: obrót względem $p = (1, 1)$ o 30°

Nasze przekształcenie (*nie liniowe*):

- 1 przesunięcie o $(-1, -1)$:

$$(x, y) \mapsto (x - 1, y - 1)$$

- 2 obrót o 30° :

$$\begin{aligned}(x, y) \mapsto \begin{pmatrix} \cos 30^\circ & -\sin 30^\circ \\ \sin 30^\circ & \cos 30^\circ \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \sqrt{3} & -1 \\ 1 & \sqrt{3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \sqrt{3}x - y \\ x + \sqrt{3}y \end{pmatrix}\end{aligned}$$

- 3 przesunięcie o $(1, 1)$: $(x, y) \mapsto (x + 1, y + 1)$

Przykład: cd. — obliczanie współrzędnych

Obraz punktu $(-1, 1)$:

$$\textcircled{1} \quad (x, y) \mapsto (x - 1, y - 1)$$

Przykład: cd. — obliczanie współrzędnych

Obraz punktu $(-1, 1)$:

- 1 $(x, y) \mapsto (x - 1, y - 1)$
dostajemy $(-2, 0)$.

Przykład: cd. — obliczanie współrzędnych

Obraz punktu $(-1, 1)$:

1 $(x, y) \mapsto (x - 1, y - 1)$
dostajemy $(-2, 0)$.

2 $(x, y) \mapsto \frac{1}{2}(\sqrt{3}x - y, x + \sqrt{3}y)$

Przykład: cd. — obliczanie współrzędnych

Obraz punktu $(-1, 1)$:

- 1 $(x, y) \mapsto (x - 1, y - 1)$
dostajemy $(-2, 0)$.
- 2 $(x, y) \mapsto \frac{1}{2}(\sqrt{3}x - y, x + \sqrt{3}y)$
dostajemy $(-\sqrt{3}, -1)$

Przykład: cd. — obliczanie współrzędnych

Obraz punktu $(-1, 1)$:

- 1 $(x, y) \mapsto (x - 1, y - 1)$
dostajemy $(-2, 0)$.
- 2 $(x, y) \mapsto \frac{1}{2}(\sqrt{3}x - y, x + \sqrt{3}y)$
dostajemy $(-\sqrt{3}, -1)$
- 3 $(x, y) \mapsto (x + 1, y + 1)$

Przykład: cd. — obliczanie współrzędnych

Obraz punktu $(-1, 1)$:

- 1 $(x, y) \mapsto (x - 1, y - 1)$
dostajemy $(-2, 0)$.
- 2 $(x, y) \mapsto \frac{1}{2}(\sqrt{3}x - y, x + \sqrt{3}y)$
dostajemy $(-\sqrt{3}, -1)$
- 3 $(x, y) \mapsto (x + 1, y + 1)$
dostajemy $(1 - \sqrt{3}, 0)$.

Przekształcenie afiniczne

Przekształcenie afiniczne:

- 1 Przesunięcie σ_1 .
- 2 Przekształcenie liniowe φ .
- 3 Przesunięcie σ_2 (dowolne, niekoniecznie odwrotne do pierwszego).

Przekształcenie afiniczne

Przekształcenie afiniczne:

- 1 Przesunięcie σ_1 .
- 2 Przekształcenie liniowe φ .
- 3 Przesunięcie σ_2 (dowolne, niekoniecznie odwrotne do pierwszego).

Jeżeli przesunięcia są odpowiednio o $\mathbf{b}_1$ i $\mathbf{b}_2$, to zapiszmy obliczanie obrazu wektora $\mathbf{v}$:

$$\phi(\mathbf{v}) = \varphi(\mathbf{v} + \mathbf{b}_1) + \mathbf{b}_2 = \varphi(\mathbf{v}) + \overbrace{(\varphi(\mathbf{b}_1) + \mathbf{b}_2)}^{\mathbf{b}}$$

Czyli w przekształceniu afinicznym wystarczy nam obraz tylko jedno, końcowe przesunięcie.

Przekształcenie afiniczne

Przekształcenie afiniczne

Przekształceniem afinicznym nazywamy funkcję $\phi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, którą można opisać jako:

$$\phi = \sigma \circ \varphi$$

$\phi(x) = \sigma(\varphi(x))$

gdzie:

- $\varphi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ jest przekształceniem liniowym.
- $\sigma: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ — istnieje wektor $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$, taki że dla wszystkich $\mathbf{v}$ zachodzi $\sigma(\mathbf{v}) = \mathbf{v} + \mathbf{b}$

Czy każde przekształcenie liniowe jest afiniczne?

Czy każde przekształcenie liniowe jest afiniczne?

Tak. Wystarczy po prostu jako przesunięcia σ_1, σ_2 wziąć przesunięcia o $\mathbf{0}$.

W drugą stronę nie

Czy każde przekształcenie afiniczne jesteśmy w stanie zapisać macierzą?

Czy każde przekształcenie afiniczne jesteśmy w stanie zapisać macierzą?

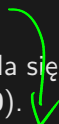
Nie. Tylko te liniowe; przypomnijmy wzór na mnożenie macierzy:
Zatem w przekształceniu opisanym macierzą obraz $\mathbf{0}$ to $\mathbf{0}$ — nic dziwnego, macierze opisują przekształcenia liniowe.

Czy przekształcenia afiniczne zachowują kombinacje liniowe?

Czy przekształcenia afiniczne zachowują kombinacje liniowe?

Nie. Przypomnijmy, co to znaczy zachowują kombinacje liniowe:

$$\varphi(a\mathbf{u} + b\mathbf{v}) = a\varphi(\mathbf{u}) + b\varphi(\mathbf{v})$$

No ale one nie zachowują $\mathbf{0}$, a z powyższej równości da się wyprowadzić, że $\varphi(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ (wystarczy podstawić $a = b = 1, \mathbf{u} = \mathbf{v} = \mathbf{0}$). 

$$\varphi(\mathbf{0}) = \varphi(\mathbf{0} + \mathbf{0}) = 2\varphi(\mathbf{0})$$

$$\mathbf{0} = \varphi(\mathbf{0})$$

Kombinacje afiniczne

Kombinacja afiniczna wektorów

Kombinacją afiniczną wektorów $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k$ nazywamy dowolną sumę w postaci:

$$a_1 \mathbf{v}_1 + a_2 \mathbf{v}_2 + \dots + a_k \mathbf{v}_k$$

gdzie $a_1, \dots, a_k \in \mathbb{R}$.

$$a_1 + a_2 + \dots + a_k = 1$$

Kombinacje afiniczne

Kombinacja afiniczna wektorów

Kombinacją afiniczną wektorów $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k$ nazywamy dowolną sumę w postaci:

$$a_1 \mathbf{v}_1 + a_2 \mathbf{v}_2 + \dots + a_k \mathbf{v}_k$$

gdzie $a_1, \dots, a_k \in \mathbb{R}$.

$$a_1 + a_2 + \dots + a_k = 1$$

Claim: przekształcenia afiniczne zachowują kombinacje afiniczne.

Kombinacje i przekształcenia afiniczne

Claim: przekształcenia afiniczne zachowują kombinacje afiniczne.
Zapiszmy przekształcenie afiniczne ϕ jako $\phi = \sigma \circ \varphi$ — złożenie przesunięcia σ i przekształcenia liniowego φ .

Kombinacje i przekształcenia afiniczne

Claim: przekształcenia afiniczne zachowują kombinacje afiniczne.

Zapiszmy przekształcenie afiniczne ϕ jako $\phi = \sigma \circ \varphi$ — złożenie przesunięcia σ i przekształcenia liniowego φ .

φ oczywiście zachowuje kombinacje afiniczne, bo ono jest liniowe, a kombinacja afiniczna jest kombinacją liniową (tak jak kwadrat jest prostokątem).

Kombinacje i przekształcenia afiniczne

Claim: przekształcenia afiniczne zachowują kombinacje afiniczne.

Zapiszmy przekształcenie afiniczne ϕ jako $\phi = \sigma \circ \varphi$ — złożenie przesunięcia σ i przekształcenia liniowego φ .

φ oczywiście zachowuje kombinacje afiniczne, bo ono jest liniowe, a kombinacja afiniczna jest kombinacją liniową (tak jak kwadrat jest prostokątem).

Przesunięcia też zachowują kombinacje afiniczne:

$$a_1 + \dots + a_k = 1$$

$$\begin{aligned} & \sigma(a_1 \mathbf{v}_1 + a_2 \mathbf{v}_2 + \dots + a_k \mathbf{v}_k) \\ &= (a_1 \mathbf{v}_1 + a_2 \mathbf{v}_2 + \dots + a_k \mathbf{v}_k) + \underline{1}\mathbf{b} \\ &= (a_1 \mathbf{v}_1 + a_2 \mathbf{v}_2 + \dots + a_k \mathbf{v}_k) + (a_1 + a_2 + \dots + a_k)\mathbf{b} \\ &= a_1(\mathbf{v}_1 + \mathbf{b}) + a_2(\mathbf{v}_2 + \mathbf{b}) + \dots + a_k(\mathbf{v}_k + \mathbf{b}) \\ &= a_1\sigma(\mathbf{v}_1) + a_2\sigma(\mathbf{v}_2) + \dots + a_k\sigma(\mathbf{v}_k) \end{aligned}$$

Przekształcenia i kombinacje afiniczne

Pewnie przekształcenie $\phi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ zachowuje kombinacje afiniczne...czy w takim razie jest złożeniem przekształcenia liniowego z przesunięciem?

Przekształcenia i kombinacje afiniczne

$$\phi(v) = \underbrace{\varphi(v)}_{\text{sprowadzamy się}} + \underline{b}$$

Pewnie przekształcenie $\phi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ zachowuje kombinacje afiniczne...czy w takim razie jest złożeniem przekształcenia liniowego z przesunięciem?

Oznaczmy $\mathbf{b} = \phi(\mathbf{0})$ oraz $f(\mathbf{v}) = \phi(\mathbf{v}) - \mathbf{b}$:

Przekształcenia i kombinacje afiniczne

Pewnie przekształcenie $\phi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ zachowuje kombinacje afiniczne...czy w takim razie jest złożeniem przekształcenia liniowego z przesunięciem?

Oznaczmy $\mathbf{b} = \phi(\mathbf{0})$ oraz $f(\mathbf{v}) = \phi(\mathbf{v}) - \mathbf{b}$:

- $\phi(\mathbf{v}) = f(\mathbf{v}) + \mathbf{b}$

Przekształcenia i kombinacje afiniczne

Pewnie przekształcenie $\phi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ zachowuje kombinacje afiniczne...czy w takim razie jest złożeniem przekształcenia liniowego z przesunięciem?

Oznaczmy $\mathbf{b} = \phi(\mathbf{0})$ oraz $f(\mathbf{v}) = \phi(\mathbf{v}) - \mathbf{b}$:

- $\phi(\mathbf{v}) = f(\mathbf{v}) + \mathbf{b}$
- Do udowodnienia: f jest liniowe.

Przekształcenia i kombinacje afiniczne

Skorzystamy w środku ze składowki, że:

$$av = av + (1-a)0$$

ponieważ $a + (1-a) = 1$ to to kombinacja afiniczna

Część I: f zachowuje mnożenie przez skalar — $f(av) = af(v)$

$$\begin{aligned} f(av) &= \phi(av) - b = \phi(av + (1-a)0) - b \\ &= a \underbrace{\phi(v)}_{f(v) = \phi(v) + b} + (1-a) \underbrace{\phi(0)}_b - b \\ &= a(f(v) + b) + (1-a)b - b \\ &= af(v) + ab + b - ab - b = af(v) \end{aligned}$$

Część II: f zachowuje dodawanie — $f(\mathbf{v} + \mathbf{u}) = f(\mathbf{v}) + f(\mathbf{u})$

$$\begin{aligned} f(\mathbf{v} + \mathbf{u}) &= \phi(\mathbf{v} + \mathbf{u}) - b = \phi\left(\frac{1}{2} \cdot (2\mathbf{v}) + \frac{1}{2}(2\mathbf{u})\right) - b \\ &= \frac{1}{2} \phi(2\mathbf{v}) + \frac{1}{2} \phi(2\mathbf{u}) - b \\ &= \frac{1}{2} (f(2\mathbf{v}) + b) + \frac{1}{2} (f(2\mathbf{u}) + b) - b \\ &= \frac{1}{2} f(2\mathbf{v}) + \frac{1}{2} f(2\mathbf{u}) = f(\mathbf{v}) + f(\mathbf{u}) \end{aligned}$$



Cel:

- Odróżniać wektory od punktów.
- Móc zapisać przesuwanie jako mnożenie macierzy.

Współrzędne rzutowe

Cel:

- Odróżniać wektory od punktów.
- Móc zapisać przesuwanie jako mnożenie macierzy.

Użyjemy $n + 1$ współrzędnych do n -wymiarowych:

Wektor:

$$(x_1, x_2, \dots, x_n, 0)$$

Punkt:

$$(x_1, x_2, \dots, x_n, 1)$$

Współrzędne rzutowe

Cel:

- Odróżniać wektory od punktów.
- Móc zapisać przesuwanie jako mnożenie macierzy.

Użyjemy $n + 1$ współrzędnych do n -wymiarowych:

Wektor:

$$(x_1, x_2, \dots, x_n, 0)$$

Punkt:

$$(x_1, x_2, \dots, x_n, 1)$$

- wektor + wektor: ok!

- punkt + punkt: err!

Współrzędne rzutowe

Cel:

- Odróżniać wektory od punktów.
- Móc zapisać przesuwanie jako mnożenie macierzy.

Użyjemy $n + 1$ współrzędnych do n -wymiarowych:

Wektor:

$$(x_1, x_2, \dots, x_n, 0)$$

Punkt:

$$(x_1, x_2, \dots, x_n, 1)$$

- wektor + wektor: ok!
- wektor + punkt: ok!

- punkt + punkt: err!
- wektor + punkt: ok!

Współrzędne rzutowe

Cel:

- Odróżniać wektory od punktów.
- Móc zapisać przesuwanie jako mnożenie macierzy.

Użyjemy $n + 1$ współrzędnych do n -wymiarowych:

Wektor:

$$(x_1, x_2, \dots, x_n, 0)$$

Punkt:

$$(x_1, x_2, \dots, x_n, 1)$$

- wektor + wektor: ok!
- wektor + punkt: ok!
- mnożenie przez skalar: ok!

- punkt + punkt: err!
- wektor + punkt: ok!
- mnożenie przez skalar: err!

Przesunięcie w macierzy

Dokładając dodatkową współrzędną, mamy:

- O jedną kolumnę więcej, która przypada na dodatkową współrzędną w dziedzinie.
- O jeden wiersz więcej, żeby wyprodukować dodatkową współrzędną w zbiorze wartości.

Przesunięcie w macierzy

Dokładając dodatkową współrzędną, mamy:

- O jedną kolumnę więcej, która przypada na dodatkową współrzędną w dziedzinie.
- O jeden wiersz więcej, żeby wyprodukować dodatkową współrzędną w zbiorze wartości.

W dodatkowej kolumnie dopisujemy przesunięcie, w dodatkowym rzędzie zera, na końcu jedynek:

$$\begin{pmatrix} f_{11} & \dots & f_{1n} & b_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ f_{n1} & \dots & f_{nn} & b_n \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \\ \alpha \end{pmatrix} = f(v) + \alpha \mathbf{b}$$

- Przekształcenie afiniczne — złożenie przekształcenia liniowego z przesunięciem:

$$\phi(\mathbf{v}) = \varphi(\mathbf{v}) + \mathbf{b} = A\mathbf{v} + \mathbf{b}$$

- Kombinacje afiniczne — kombinacje liniowe o sumie współczynników równej 1.
- Przekształcenie jest afiniczne wtedy i tylko wtedy, gdy zachowuje kombinacje afiniczne.



⇐ wystarczy