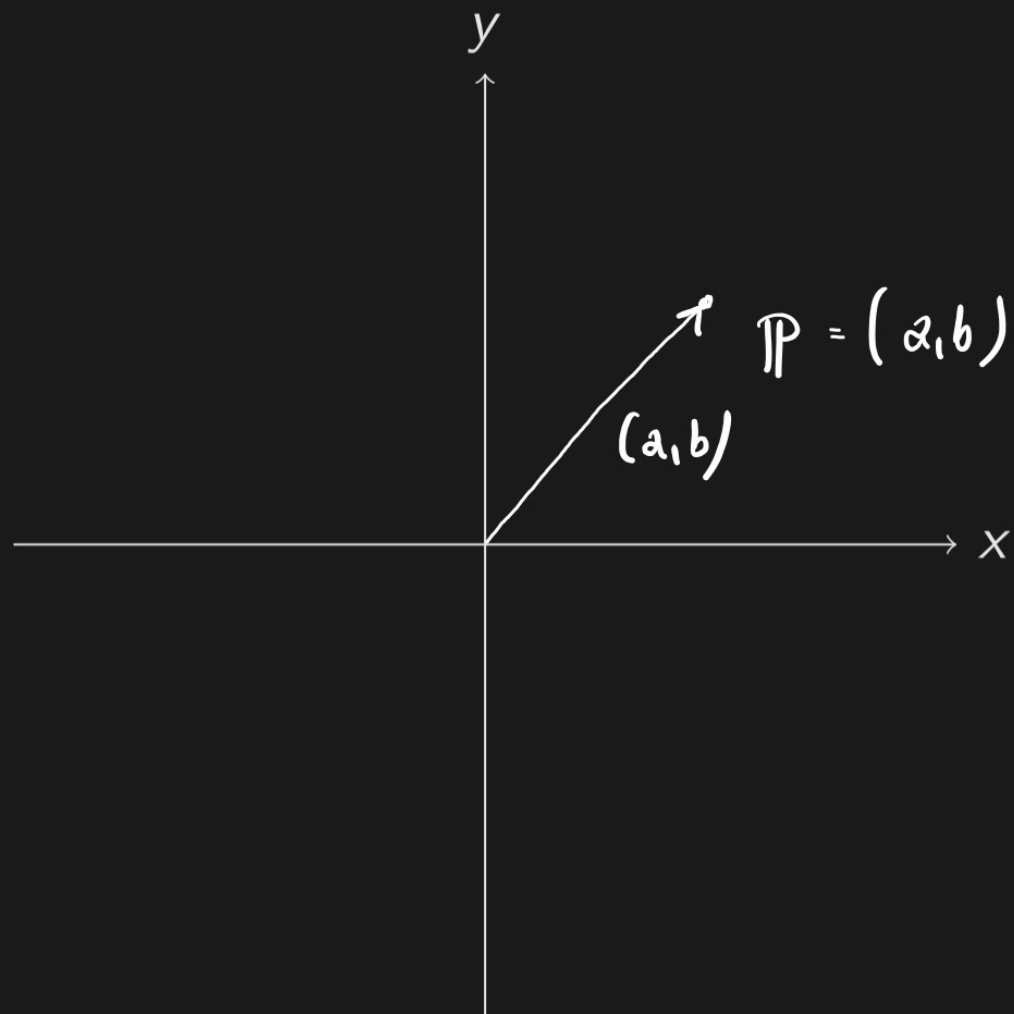


Co to jest przestrzeń afiniczna?

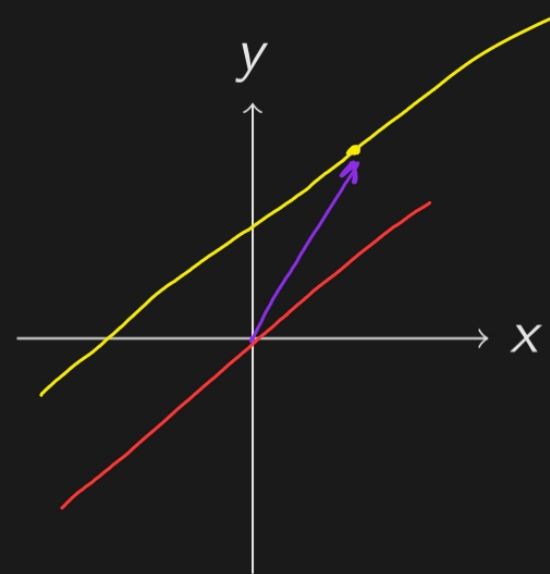
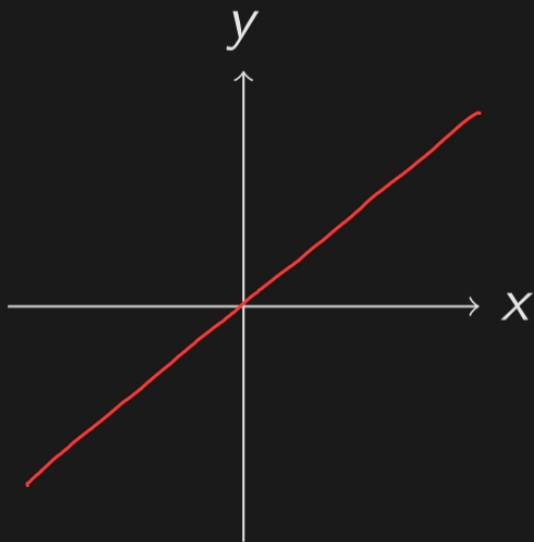
Matematyka dla ciekawych świata XVII

Daniel Laskowski

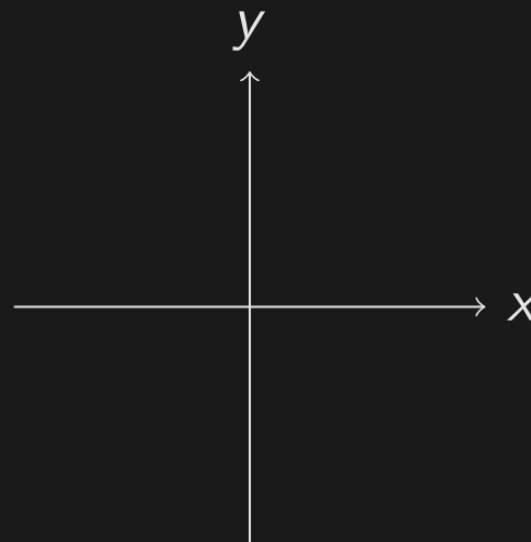
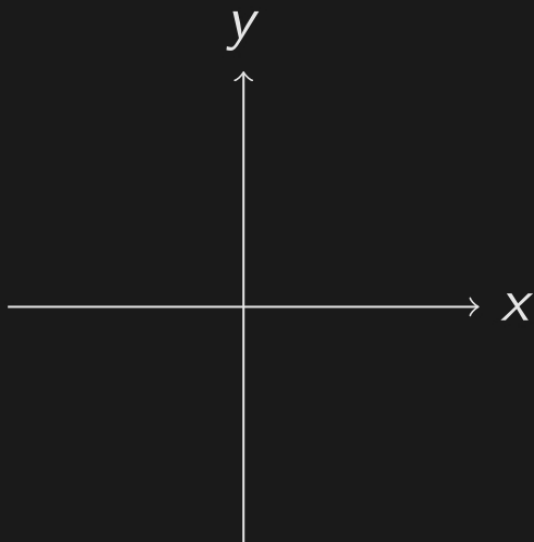
13 kwietnia 2026



Przestrzeń afiniczna



Przestrzeń afiniczna



Definicja (przestrzeń afiniczna)

Niech $\mathbf{p}$ będzie punktem, V będzie podprzestrzenią liniową. *Przestrzenią afiniczną* $H := \mathbf{p} + V$ nazywamy zbiór będący podprzestrzenią liniową V przesuniętą o wektor $\mathbf{p}$ (czyli „dosuniętą” do punktu $\mathbf{p}$). Przestrzeń V nazywamy wówczas przestrzenią styczną do H i oznaczamy $T(H)$.

Kombinacja afiniczna

Definicja (kombinacja afiniczna)

Kombinacją afiniczną nazywamy wyrażenie, będące sumą skończonej liczby punktów pomnożonych przez skalary sumujące się do 1:

$$\mathbf{q} = t_1\mathbf{p}_1 + t_2\mathbf{p}_2 + \dots + t_n\mathbf{p}_n, \quad \text{gdzie } t_1 + t_2 + \dots + t_n = 1.$$

Kombinacja afiniczna

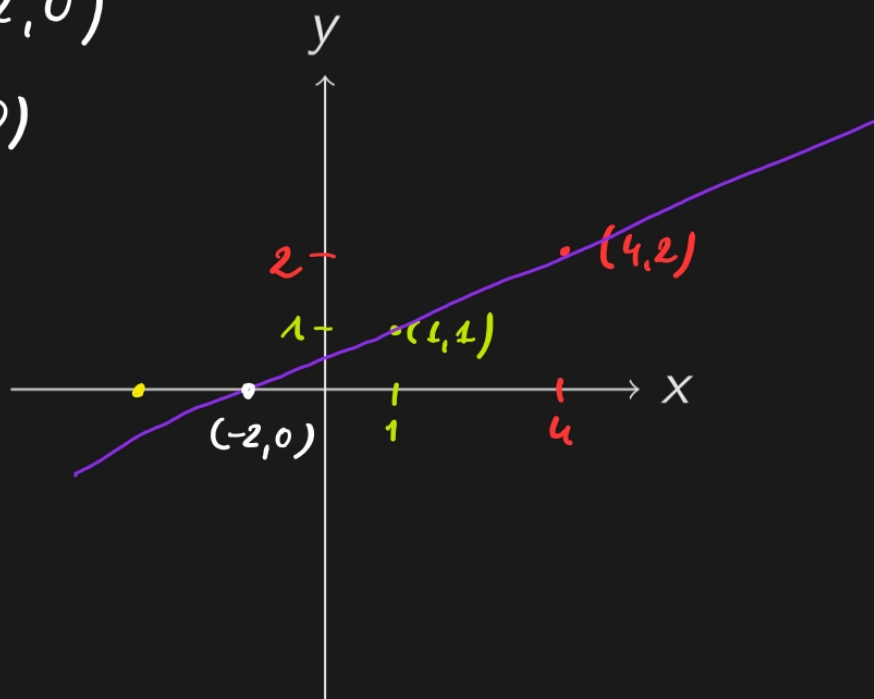
Definicja (kombinacja afiniczna)

Kombinacją afiniczną nazywamy wyrażenie, będące sumą skończonej liczby punktów pomnożonych przez skalary sumujące się do 1:

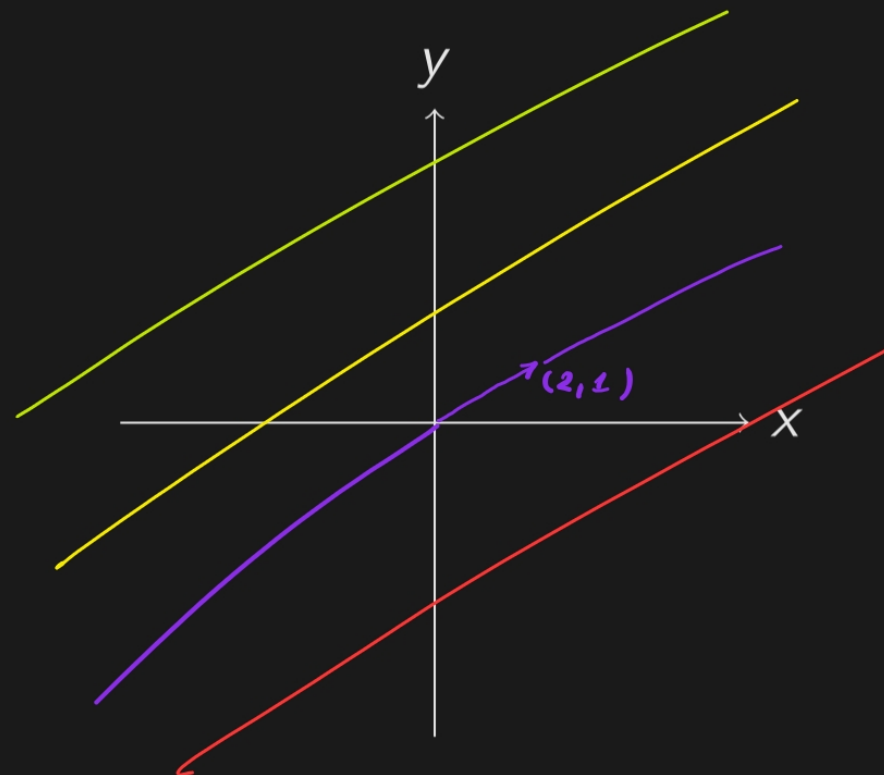
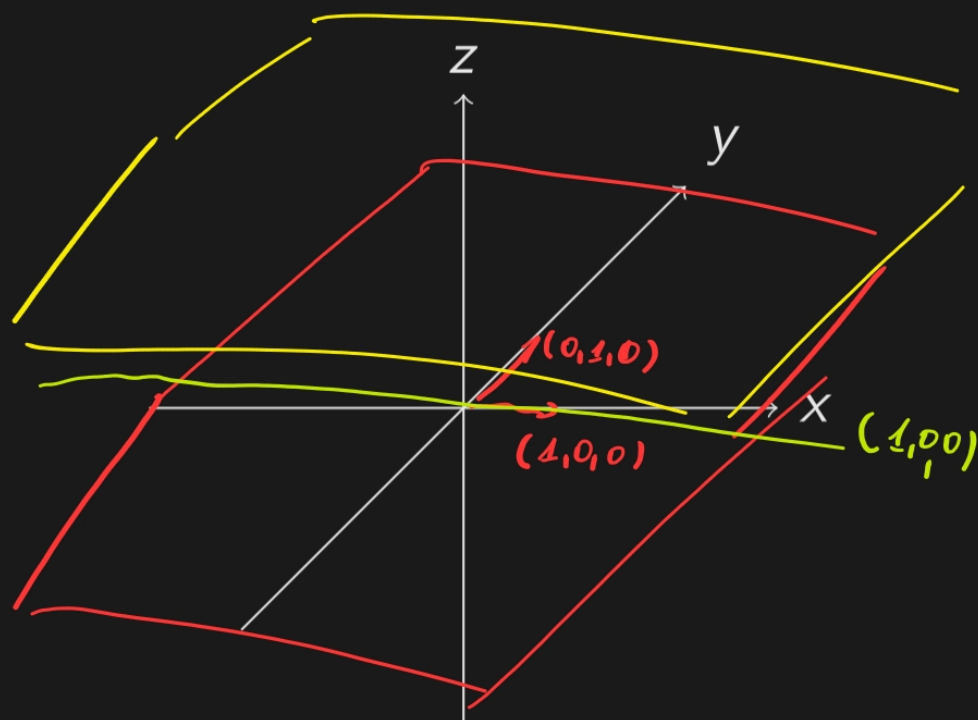
$$\mathbf{q} = t_1 \mathbf{p}_1 + t_2 \mathbf{p}_2 + \dots + t_n \mathbf{p}_n, \quad \text{gdzie } t_1 + t_2 + \dots + t_n = 1.$$

$$2 \cdot (1, 1) - 1 \cdot (4, 2) = (-2, 0)$$

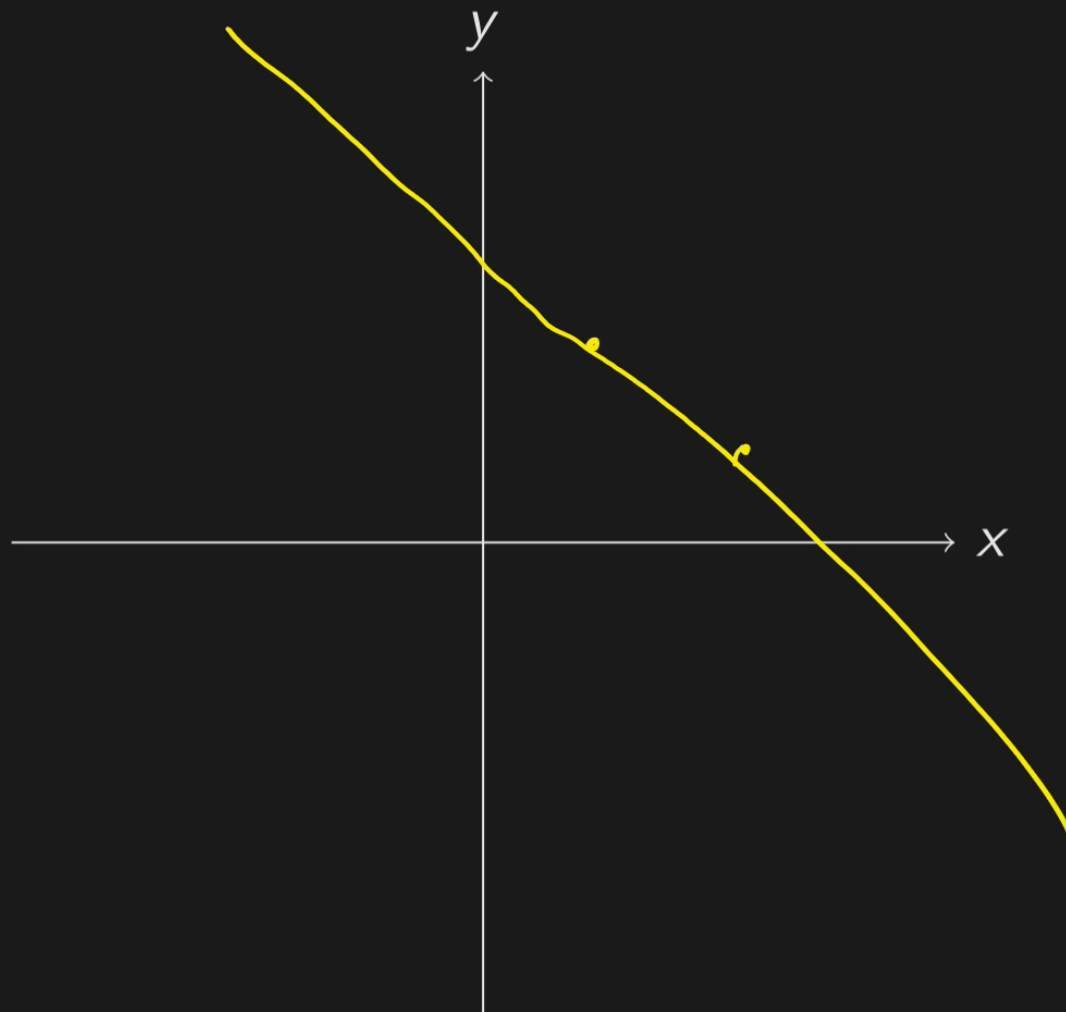
$$4 \cdot (1, 1) - 2 \cdot (4, 2) = (-4, 0)$$



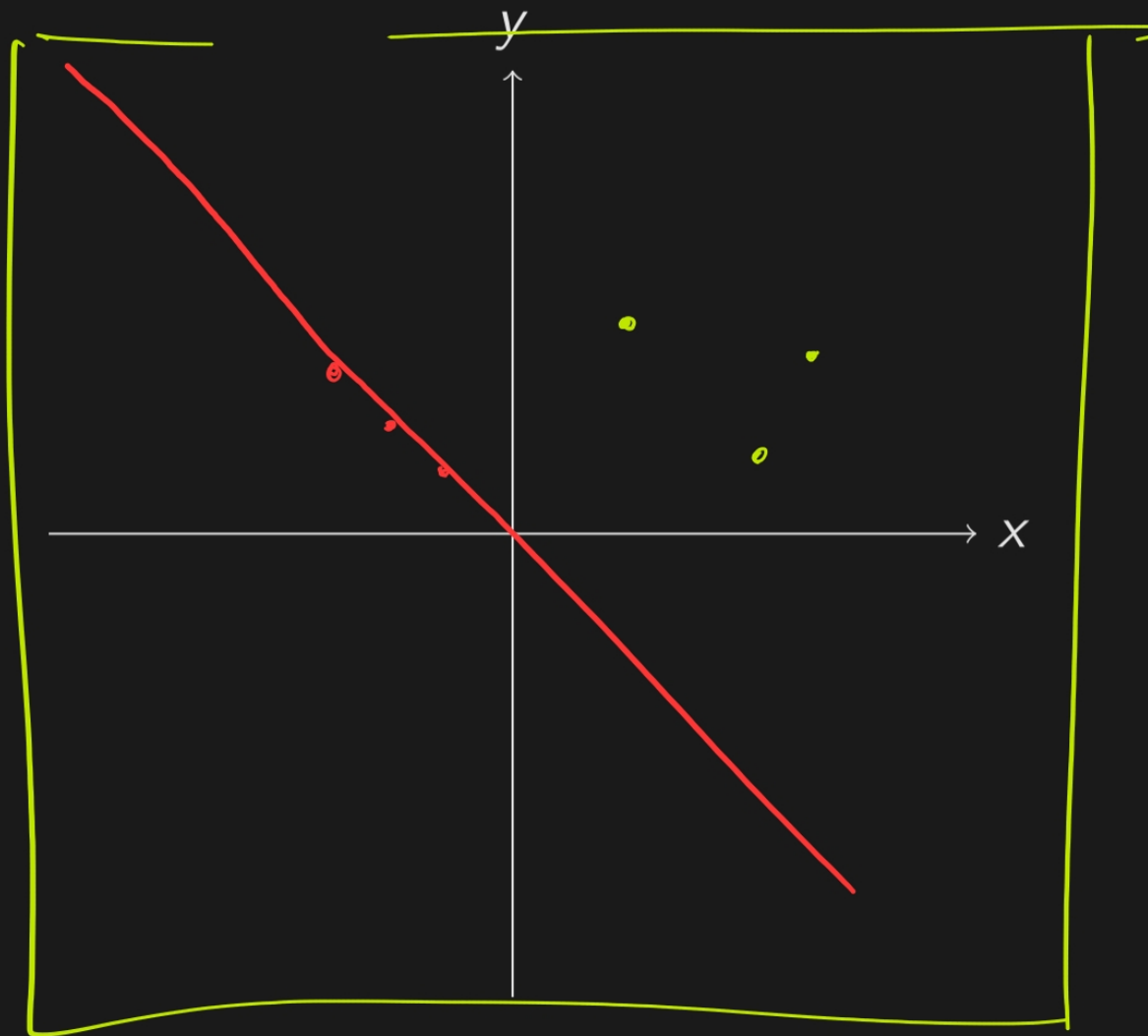
Co nam daje przestrzeń styczna?



Jak opisać przestrzeń afiniczną?



Jak opisać przestrzeń afiniczną?



Afiniczna niezależność

Definicja (układ afinicznie zależny)

Układ punktów $(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \dots, \mathbf{p}_n)$ jest *afinicznie zależny*, gdy któryś z wektorów daje się zapisać jako kombinacja afiniczna pozostałych.

Afiniczna niezależność

Definicja (układ afinicznie zależny)

Układ punktów $(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \dots, \mathbf{p}_n)$ jest *afinicznie zależny*, gdy któryś z wektorów daje się zapisać jako kombinacja afiniczna pozostałych.

Afiniczna zależność w praktyce

W praktyce układ jest afinicznie zależny, gdy układ $(\overrightarrow{\mathbf{p}_1\mathbf{p}_2}, \overrightarrow{\mathbf{p}_1\mathbf{p}_3}, \dots, \overrightarrow{\mathbf{p}_1\mathbf{p}_n})$ jest afinicznie zależny.

Afiniczna niezależność

Definicja (układ afinicznie zależny)

Układ punktów $(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \dots, \mathbf{p}_n)$ jest *afinicznie zależny*, gdy któryś z wektorów daje się zapisać jako kombinacja afiniczna pozostałych.

Afiniczna zależność w praktyce

W praktyce układ jest afinicznie zależny, gdy układ $(\overrightarrow{\mathbf{p}_1\mathbf{p}_2}, \overrightarrow{\mathbf{p}_1\mathbf{p}_3}, \dots, \overrightarrow{\mathbf{p}_1\mathbf{p}_n})$ jest afinicznie zależny.

Definicja (układ afinicznie niezależny)

Układ punktów $(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \dots, \mathbf{p}_n)$ jest *afinicznie niezależny*, gdy nie jest afinicznie zależny.

Skąd wziąć punkty rozpinające?

Definicja (baza przestrzeni afinicznej)

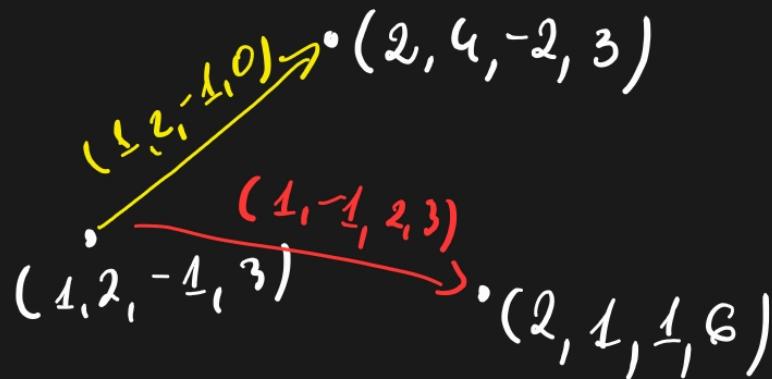
Bazą przestrzeni afinicznej H nazywamy afinicznie niezależny układ rozpinający V .

Skąd wziąć punkty rozpinające?

Definicja (baza przestrzeni afinicznej)

Bazą przestrzeni afinicznej H nazywamy afinicznie niezależny układ rozpinający V .

$$H := (1, 2, -1, 3) + \text{span}((1, 2, -1, 0), (1, -1, 2, 3))$$



$$\text{aff}((1, 2, -1, 3), (2, 4, -2, 3), (2, 1, 1, 6))$$

Skąd wziąć punkty rozpinające?

Definicja (baza przestrzeni afinicznej)

Bazą przestrzeni afinicznej H nazywamy afinicznie niezależny układ rozpinający V .

$$H := (1, 2, -1, 3) + \text{span}((1, 2, -1, 0), (1, -1, 2, 3))$$

$$\text{aff}((1, 2, -1, 3), (2, 4, -2, 3), (2, 1, 1, 6))$$

Skąd wziąć punkty rozpinające?

Definicja (baza przestrzeni afinicznej)

Bazą przestrzeni afinicznej H nazywamy afinicznie niezależny układ rozpinający V .

$$H := (1, 2, -1, 3) + \text{span}((1, 2, -1, 0), (1, -1, 2, 3))$$

$$\text{aff}((1, 2, -1, 3), (2, 4, -2, 3), (2, 1, 1, 6))$$
$$\left((1, 2, -1, 3); (1, 2, -1, 0), (1, -1, 2, 3) \right)$$

Definicja (układ bazowy przestrzeni afinicznej)

Układem bazowym przestrzeni afinicznej $(\mathbf{p}, \mathbf{p} + \mathbf{v}_1, \mathbf{p} + \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{p} + \mathbf{v}_n)$ nazywamy układ $(\mathbf{p}; \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n)$.

Czy da się układem równań?

$$(1, 2, -1, 3) + \text{span}((1, 2, -1, 0), (1, -1, 2, 3))$$

Czy da się układem równań?

$$(1, 2, -1, 3) + \text{span}((1, 2, -1, 0), (1, -1, 2, 3))$$

$$\begin{cases} c_1 + 2c_2 - c_3 = 0 \\ c_1 - c_2 + 2c_3 + 3c_4 = 0 \end{cases}$$

Czy da się układem równań?

$$(1, 2, -1, 3) + \text{span}((1, 2, -1, 0), (1, -1, 2, 3))$$

$$\begin{cases} c_1 + 2c_2 - c_3 = 0 \\ c_1 - c_2 + 2c_3 + 3c_4 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} c_1 = -c_3 - 2c_4 \\ c_2 = c_3 + c_4 \end{cases} \quad \begin{cases} -x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ -2x_1 + x_2 + x_4 = 0 \end{cases}$$

Czy da się układem równań?

$$(1, 2, -1, 3) + \text{span}((1, 2, -1, 0), (1, -1, 2, 3))$$

$$\begin{cases} c_1 + 2c_2 - c_3 = 0 \\ c_1 - c_2 + 2c_3 + 3c_4 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} c_1 = -c_3 - 2c_4 \\ c_2 = c_3 + c_4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ -2x_1 + x_2 + x_4 = 0 \\ -2 + 2 + \dots + 3 = 3 \end{cases}$$

Czy da się układem równań?

$$(1, 2, -1, 3) + \text{span}((1, 2, -1, 0), (1, -1, 2, 3))$$

$$\begin{cases} c_1 + 2c_2 - c_3 = 0 \\ c_1 - c_2 + 2c_3 + 3c_4 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} c_1 = -c_3 - 2c_4 \\ c_2 = c_3 + c_4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ -2x_1 + x_2 + x_4 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ -2x_1 + x_2 + x_4 = 3 \end{cases}$$

Parametryzacja

$$(0, 0, 3) + \text{span}((1, 0, 0), (0, 1, 0))$$

$$(4, 1, 0) = 4v_1 + 1 \cdot v_2$$

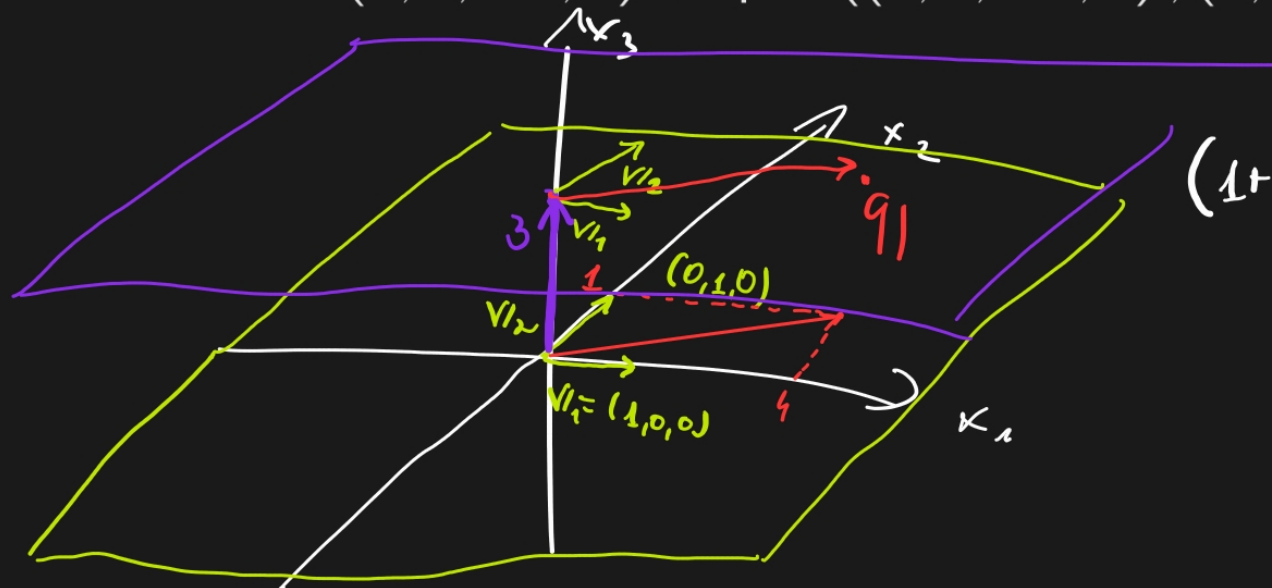
$$q_1 = (0, 0, 3) + 4v_1 + 1 \cdot v_2$$

Definicja (parametryzacja)

Parametryzacją nazywamy zapisanie dowolnego punktu w przestrzeni afinicznej $H := \mathbf{p} + \text{span}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n)$, jako sumy punktu $\mathbf{p}$ i kombinacji liniowej wektorów $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n$.

$$(1, 2, -1, 3) + c_1(1, 2, -1, 0) + c_2(1, -1, 2, 3)$$

$$(1, 2, -1, 3) + \text{span}((1, 2, -1, 0), (1, -1, 2, 3))$$



$$(1+c_1+c_2, 2+2c_1-c_2, -1-c_1+2c_2, 3+3c_2)$$

Parametryzacja

Definicja (parametryzacja)

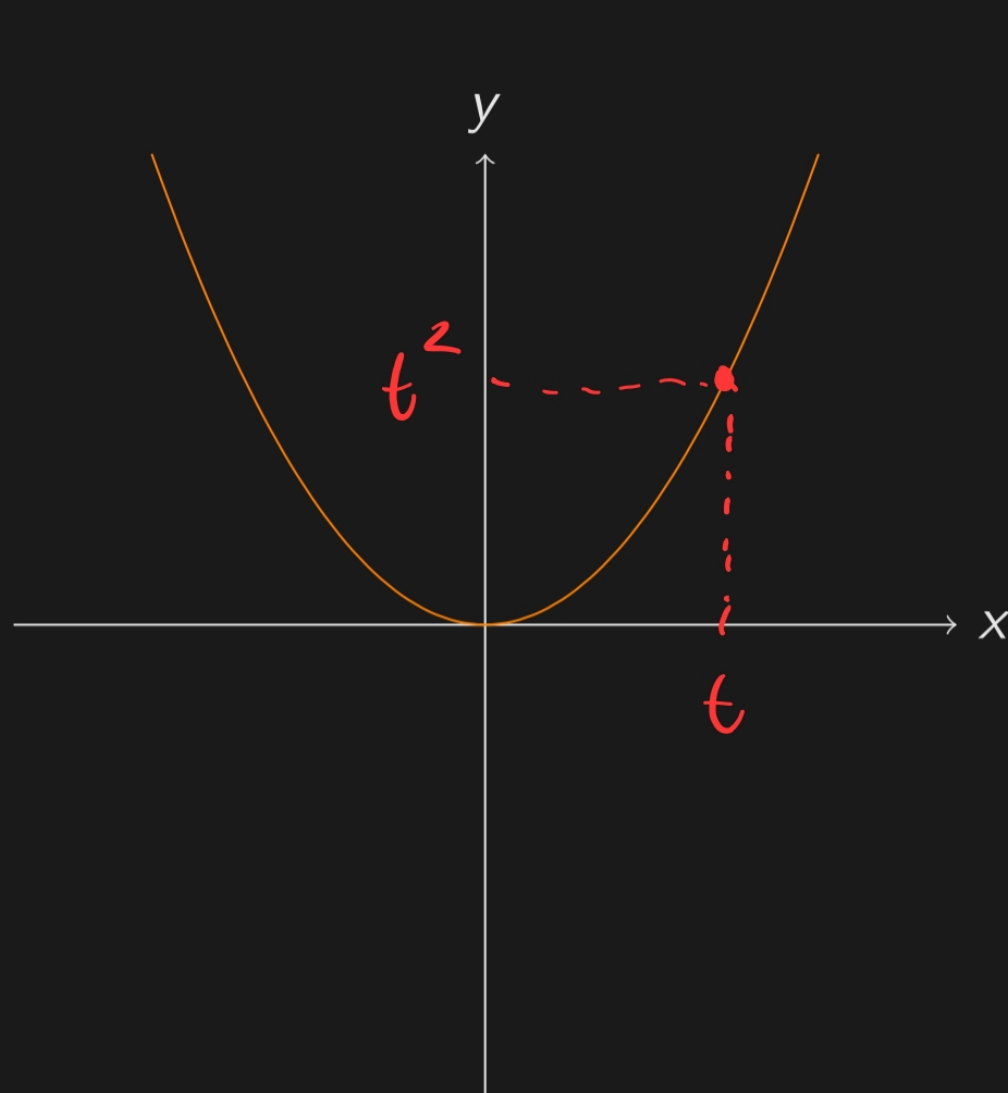
Parametryzacją nazywamy zapisanie dowolnego punktu w przestrzeni afinicznej $H := \mathbf{p} + \text{span}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n)$, jako sumy punktu $\mathbf{p}$ i kombinacji liniowej wektorów $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n$.

$$(1, 2, -1, 3) + \text{span}((1, 2, -1, 0), (1, -1, 2, 3))$$

$$(1, 2, -1, 3) + c_1(1, 2, -1, 0) + c_2(1, -1, 2, 3), \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

$$H = \{(1 + c_1 + c_2, 2 + 2c_1 - c_2, -1 - c_2 + 2c_2, 3 + 3c_2) : c_1, c_2 \in \mathbb{R}\}.$$

Czy można parametryzować inne rzeczy?



$$y = x^2$$

$$(t, t^2), t \in \mathbb{R}$$