

Przekształcenia liniowe w praktyce

Wojtek Matusiak

30 marca 2026r.

Przekształcenie liniowe — funkcja $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ spełniająca:

- dla dowolnych wektorów $u, v \in \mathbb{R}^n$:

$$\varphi(u + v) = \varphi(u) + \varphi(v)$$

- dla dowolnych wektora $v \in \mathbb{R}^n$ i liczby $c \in \mathbb{R}$:

$$\varphi(\alpha v) = \alpha \varphi(v)$$

W poprzednim odcinku...

Dlatego przekształcenia liniowe możemy jednoznacznie opisać podając obrazy wektorów bazowych:

$$\begin{aligned}\varphi((x, y, z)) &= \varphi((x, 0, 0) + (0, y, 0) + (0, 0, z)) \\ &= x\varphi((1, 0, 0)) + y\varphi((0, 1, 0)) + z\varphi((0, 0, 1))\end{aligned}$$

W poprzednim odcinku...

Dlatego przekształcenia liniowe możemy jednoznacznie opisać podając obrazy wektorów bazowych:

$$\begin{aligned}\varphi((x, y, z)) &= \varphi((x, 0, 0) + (0, y, 0) + (0, 0, z)) \\ &= x\varphi((1, 0, 0)) + y\varphi((0, 1, 0)) + z\varphi((0, 0, 1))\end{aligned}$$

Disclaimer

Co się zmieni, jeżeli przekształcenie będzie $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$?

W poprzednim odcinku...

Dlatego przekształcenia liniowe możemy jednoznacznie opisać podając obrazy wektorów bazowych:

$$\begin{aligned}\varphi((x, y, z)) &= \varphi((x, 0, 0) + (0, y, 0) + (0, 0, z)) \\ &= x\varphi((1, 0, 0)) + y\varphi((0, 1, 0)) + z\varphi((0, 0, 1))\end{aligned}$$

Disclaimer

Co się zmieni, jeżeli przekształcenie będzie $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$?

Defacto nic, tylko więcej pisania (głównie wielokropków).

W poprzednim odninku...

$$\varphi((1, 0, 0)) = (\varphi_{11}, \varphi_{21}, \varphi_{31}), \quad \varphi((0, 1, 0)) = (\varphi_{12}, \varphi_{22}, \varphi_{32}), \quad \varphi((0, 0, 1)) = (\varphi_{13}, \varphi_{23}, \varphi_{33})$$

Piszemy macierz trzech wektorów zamiast φ :

$$\varphi((x, y, z)) = \begin{pmatrix} \varphi_{11} & \varphi_{12} & \varphi_{13} \\ \varphi_{21} & \varphi_{22} & \varphi_{23} \\ \varphi_{31} & \varphi_{32} & \varphi_{33} \end{pmatrix} (x, y, z) =$$

W poprzednim odcinku...

$$\varphi((1, 0, 0)) = (\varphi_{11}, \varphi_{21}, \varphi_{31}), \quad \varphi((0, 1, 0)) = (\varphi_{12}, \varphi_{22}, \varphi_{32}), \quad \varphi((0, 0, 1)) = (\varphi_{13}, \varphi_{23}, \varphi_{33})$$

Piszemy macierz trzech wektorów zamiast φ :

$$\varphi((x, y, z)) = \begin{pmatrix} \varphi_{11} & \varphi_{12} & \varphi_{13} \\ \varphi_{21} & \varphi_{22} & \varphi_{23} \\ \varphi_{31} & \varphi_{32} & \varphi_{33} \end{pmatrix} (x, y, z) = \begin{pmatrix} x\varphi_{11} + y\varphi_{12} + z\varphi_{13} \\ x\varphi_{21} + y\varphi_{22} + z\varphi_{23} \\ x\varphi_{31} + y\varphi_{32} + z\varphi_{33} \end{pmatrix}$$

Przekształcenie Liniowe vs Macierz

Dowolne przekształcenie liniowe $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ jesteśmy w stanie zapisać jako macierz $M_{3,3}(\mathbb{R})$.

W poprzednim odcinku...

$$\varphi((1, 0, 0)) = (\varphi_{11}, \varphi_{21}, \varphi_{31}), \quad \varphi((0, 1, 0)) = (\varphi_{12}, \varphi_{22}, \varphi_{32}), \quad \varphi((0, 0, 1)) = (\varphi_{13}, \varphi_{23}, \varphi_{33})$$

Piszemy macierz trzech wektorów zamiast φ :

$$\varphi((x, y, z)) = \begin{pmatrix} \varphi_{11} & \varphi_{12} & \varphi_{13} \\ \varphi_{21} & \varphi_{22} & \varphi_{23} \\ \varphi_{31} & \varphi_{32} & \varphi_{33} \end{pmatrix} (x, y, z) = \begin{pmatrix} x\varphi_{11} + y\varphi_{12} + z\varphi_{13} \\ x\varphi_{21} + y\varphi_{22} + z\varphi_{23} \\ x\varphi_{31} + y\varphi_{32} + z\varphi_{33} \end{pmatrix}$$

Przekształcenie Liniowe vs Macierz

Dowolne przekształcenie liniowe $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ jesteśmy w stanie zapisać jako macierz $M_{m,n}(\mathbb{R})$ (m wierszy, n kolumn).

W poprzednim odcinku...

$$\varphi((1, 0, 0)) = (\varphi_{11}, \varphi_{21}, \varphi_{31}), \quad \varphi((0, 1, 0)) = (\varphi_{12}, \varphi_{22}, \varphi_{32}), \quad \varphi((0, 0, 1)) = (\varphi_{13}, \varphi_{23}, \varphi_{33})$$

Piszemy macierz trzech wektorów zamiast φ :

$$\varphi((x, y, z)) = \begin{pmatrix} \varphi_{11} & \varphi_{12} & \varphi_{13} \\ \varphi_{21} & \varphi_{22} & \varphi_{23} \\ \varphi_{31} & \varphi_{32} & \varphi_{33} \end{pmatrix} (x, y, z) = \begin{pmatrix} x\varphi_{11} + y\varphi_{12} + z\varphi_{13} \\ x\varphi_{21} + y\varphi_{22} + z\varphi_{23} \\ x\varphi_{31} + y\varphi_{32} + z\varphi_{33} \end{pmatrix}$$

Przekształcenie Liniowe vs Macierz

Dowolne przekształcenie liniowe $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ jesteśmy w stanie zapisać jako macierz $M_{m,n} \mathbb{R}$ (m wierszy, n kolumn).

$$\begin{pmatrix} \varphi_{11} & \varphi_{12} & \varphi_{13} \\ \varphi_{21} & \varphi_{22} & \varphi_{23} \\ \varphi_{31} & \varphi_{32} & \varphi_{33} \end{pmatrix} (v_1, v_2, v_3) = \begin{pmatrix} v_1\varphi_{11} + v_2\varphi_{12} + v_3\varphi_{13} \\ v_1\varphi_{21} + v_2\varphi_{22} + v_3\varphi_{23} \\ v_1\varphi_{31} + v_2\varphi_{32} + v_3\varphi_{33} \end{pmatrix}$$

A gdyby tak napisać kilka wektorów na raz...?

$$\begin{pmatrix} \varphi_{11} & \varphi_{12} & \varphi_{13} \\ \varphi_{21} & \varphi_{22} & \varphi_{23} \\ \varphi_{31} & \varphi_{32} & \varphi_{33} \end{pmatrix} (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3) = \begin{pmatrix} \mathbf{v}_1\varphi_{11} + \mathbf{v}_2\varphi_{12} + \mathbf{v}_3\varphi_{13} \\ \mathbf{v}_1\varphi_{21} + \mathbf{v}_2\varphi_{22} + \mathbf{v}_3\varphi_{23} \\ \mathbf{v}_1\varphi_{31} + \mathbf{v}_2\varphi_{32} + \mathbf{v}_3\varphi_{33} \end{pmatrix}$$

A gdyby tak napisać kilka wektorów na raz...?

$$\begin{pmatrix} \varphi_{11} & \varphi_{12} & \varphi_{13} \\ \varphi_{21} & \varphi_{22} & \varphi_{23} \\ \varphi_{31} & \varphi_{32} & \varphi_{33} \end{pmatrix} (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3), (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3) = \begin{pmatrix} \mathbf{v}_1\varphi_{11} + \mathbf{v}_2\varphi_{12} + \mathbf{v}_3\varphi_{13} \\ \mathbf{v}_1\varphi_{21} + \mathbf{v}_2\varphi_{22} + \mathbf{v}_3\varphi_{23} \\ \mathbf{v}_1\varphi_{31} + \mathbf{v}_2\varphi_{32} + \mathbf{v}_3\varphi_{33} \end{pmatrix},$$

Tam jest to samo, tylko z $\mathbf{u}$ zamiast $\mathbf{v}$, ewidentnie trzeba skrócić zapis :(

$$\begin{pmatrix} \varphi_{11} & \varphi_{12} & \varphi_{13} \\ \varphi_{21} & \varphi_{22} & \varphi_{23} \\ \varphi_{31} & \varphi_{32} & \varphi_{33} \end{pmatrix} ((v_1, v_2, v_3), (u_1, u_2, u_3)) = \begin{pmatrix} v_1\varphi_{11} + v_2\varphi_{12} + v_3\varphi_{13} \\ v_1\varphi_{21} + v_2\varphi_{22} + v_3\varphi_{23} \\ v_1\varphi_{31} + v_2\varphi_{32} + v_3\varphi_{33} \end{pmatrix},$$

Wepchnijmy wektory w macierz :3

$$\begin{pmatrix} \varphi_{11} & \varphi_{12} & \varphi_{13} \\ \varphi_{21} & \varphi_{22} & \varphi_{23} \\ \varphi_{31} & \varphi_{32} & \varphi_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1 & u_1 \\ v_2 & u_2 \\ v_3 & u_3 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} v_1\varphi_{11} + v_2\varphi_{12} + v_3\varphi_{13} & u_1\varphi_{11} + u_2\varphi_{12} + u_3\varphi_{13} \\ v_1\varphi_{21} + v_2\varphi_{22} + v_3\varphi_{23} & u_1\varphi_{21} + u_2\varphi_{22} + u_3\varphi_{23} \\ v_1\varphi_{31} + v_2\varphi_{32} + v_3\varphi_{33} & u_1\varphi_{31} + u_2\varphi_{32} + u_3\varphi_{33} \end{pmatrix}$$



TECHNOLOGIA ODBLOKOWANA: MNOŻENIE MACIERZY

1	1	9	3	5
8	1	1	5	1
0	8	2	7	3
3	2	1	1	1
5	4	1	5	6
2	2	9	3	4
1	5	6	7	5

1	2	3	9
1	2	5	5
2	5	2	9
3	2	4	3
1	7	6	4
1	2	2	3
9	5	1	9

9	3	0	0
0	5	2	3
2	3	2	4
3	3	3	3
2	4	3	3
9	0	1	9

1	3	5	1	1
3	2	3	2	3
6	5	1	3	5
1	2	5	6	1
2	4	8	3	1
1	2	5	1	9
2	5	8	3	1

Mnożenie macierzy

Wielki przełom
w obliczeniach

Nowe horyzonty
algorytmiki

Wzór na mnożenie macierzy

Mnożenie Macierzy

Niech $A \in M_{k,m}(\mathbb{R})$ oraz $B \in M_{n,k}(\mathbb{R})$. Iloczynem macierzy $A \cdot B$ nazywamy macierz $C \in M_{n,m}(\mathbb{R})$ określoną wzorem:

$$(c_{ij}) = (a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{ik}b_{kj})$$

Wzór na mnożenie macierzy

Mnożenie Macierzy

Niech $A \in M_{k,m}(\mathbb{R})$ oraz $B \in M_{n,k}(\mathbb{R})$. Iloczynem macierzy $A \cdot B$ nazywamy macierz $C \in M_{n,m}(\mathbb{R})$ określoną wzorem:

$$(c_{ij}) = (a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{ik}b_{kj})$$

- Można też powiedzieć tak: wartość w i -tym wierszu j -tej kolumny macierzy C to iloczyn skalarny i -tego wiersza A z j -tą kolumną B .

Wzór na mnożenie macierzy

Mnożenie Macierzy

Niech $A \in M_{k,m}(\mathbb{R})$ oraz $B \in M_{n,k}(\mathbb{R})$. Iloczynem macierzy $A \cdot B$ nazywamy macierz $C \in M_{n,m}(\mathbb{R})$ określoną wzorem:

$$(c_{ij}) = (a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{ik}b_{kj})$$

- Można też powiedzieć tak: wartość w i -tym wierszu j -tej kolumny macierzy C to iloczyn skalarny i -tego wiersza A z j -tą kolumną B .
- Jak zapamiętać wymiary wynikowej macierzy? A przekształca z $\mathbb{R}^m$ w $\mathbb{R}^k$, B z $\mathbb{R}^k$ w $\mathbb{R}^n$, zatem wykonanie kolejno mnożenia wektora przez B , potem przez A przekształca $\mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$.

Mnożenie macierzy — mnemotechnika

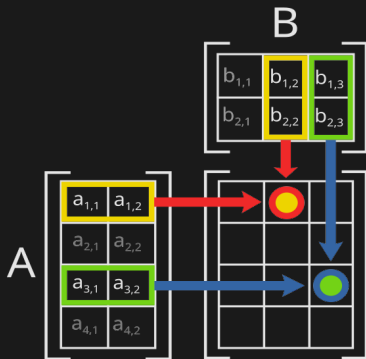
Któż nas ocali, jak zapamiętać ten straszny wzór...?

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \\ a_{41} & a_{42} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{pmatrix}$$

Mnożenie macierzy — mnemotechnika

Któż nas ocali, jak zapamiętać ten straszny wzór...?

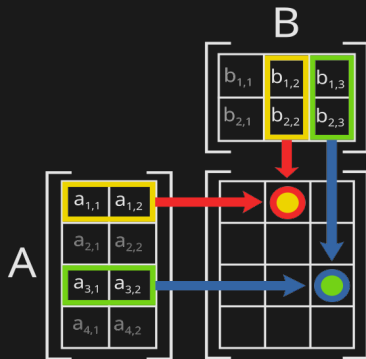
$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \\ a_{41} & a_{42} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{pmatrix}$$



Mnożenie macierzy — mnemotechnika

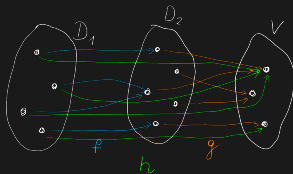
Któż nas ocali, jak zapamiętać ten straszny wzór...?

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \\ a_{41} & a_{42} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{pmatrix}$$



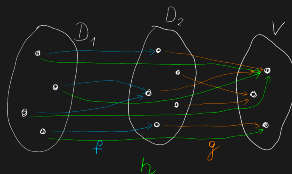
Zamknijcie oczy, wyobraźcie sobie ten obrazek przed sobą...

$$h(x) = g(f(x))$$



Składanie funkcji

$$h(x) = g(f(x))$$



Składanie funkcji

Niech $f: D_1 \rightarrow D_2$ (f jest funkcją ze zbioru D_1 w zbiór D_2) i $g: D_2 \rightarrow V$. Wówczas złożeniem funkcji g z f nazywamy funkcję $h: D_1 \rightarrow V$ daną wzorem $h(x) = g(f(x))$ dla każdego $x \in D_1$. Będziemy pisać, że $h = g \circ f$.

Składanie funkcji

Na przykład: $f(x) = x^2$, $g(x) = x + 1$.

Składanie funkcji

Na przykład: $f(x) = x^2$, $g(x) = x + 1$.

Wyznaczmy wzór $h_1 = f \circ g$:

$$\begin{aligned}h_1(x) &= f(g(x)) \\&= f(x + 1) \\&= (x + 1)^2\end{aligned}$$

Składanie funkcji

Na przykład: $f(x) = x^2$, $g(x) = x + 1$.

Wyznaczmy wzór $h_1 = f \circ g$:

$$\begin{aligned}h_1(x) &= f(g(x)) \\&= f(x + 1) \\&= (x + 1)^2\end{aligned}$$

Wzór $h_2 = g \circ f$:

$$\begin{aligned}h_2(x) &= g(f(x)) \\&= g(x^2) \\&= x^2 + 1\end{aligned}$$

Składanie funkcji

Na przykład: $f(x) = x^2$, $g(x) = x + 1$.

Wyznaczmy wzór $h_1 = f \circ g$:

$$\begin{aligned}h_1(x) &= f(g(x)) \\&= f(x + 1) \\&= (x + 1)^2\end{aligned}$$

Wzór $h_2 = g \circ f$:

$$\begin{aligned}h_2(x) &= g(f(x)) \\&= g(x^2) \\&= x^2 + 1\end{aligned}$$

Składanie funkcji nie jest przemienne.

Składanie funkcji

Na przykład: $f(x) = x^2$, $g(x) = x + 1$.

Wyznaczmy wzór $h_1 = f \circ g$:

$$\begin{aligned}h_1(x) &= f(g(x)) \\&= f(x + 1) \\&= (x + 1)^2\end{aligned}$$

Wzór $h_2 = g \circ f$:

$$\begin{aligned}h_2(x) &= g(f(x)) \\&= g(x^2) \\&= x^2 + 1\end{aligned}$$

Składanie funkcji nie jest przemienne.

Przy czym: żeby w ogóle można było zamienić kolejność, przeciwdziedzina i dziedzina obu funkcji muszą być takie same.

Składanie przekształceń

Niech $f: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^k$ i $g: \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^n$ będą przekształceniami liniowymi, których macierze to odpowiednio A i B .

Jaka jest macierz przekształcenia $h = f \circ g$? (Czyli „złożenia f z g — $h(\mathbf{v}) = \varphi(g(\mathbf{v}))$).

Składanie przekształceń

Niech $f: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^k$ i $g: \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^n$ będą przekształceniami liniowymi, których macierze to odpowiednio A i B .

Jaka jest macierz przekształcenia $h = f \circ g$? (Czyli „złożenia f z g — $h(\mathbf{v}) = \varphi(g(\mathbf{v}))$).

Przypomnienie jak doszliśmy do wzoru na mnożenie macierzy: $g(\mathbf{v})$ to $B \cdot \mathbf{v}$.

Składanie przekształceń

Niech $f: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^k$ i $g: \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^n$ będą przekształceniami liniowymi, których macierze to odpowiednio A i B .

Jaka jest macierz przekształcenia $h = f \circ g$? (Czyli „złożenia f z g — $h(\mathbf{v}) = \varphi(g(\mathbf{v}))$).

Przypomnienie jak doszliśmy do wzoru na mnożenie macierzy: $g(\mathbf{v})$ to $B \cdot \mathbf{v}$. Podobnie: $\varphi(g(\mathbf{v}))$ to $A \cdot (g(\mathbf{v})) = A \cdot (B \cdot \mathbf{v})$.

Składanie przekształceń

Niech $f: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^k$ i $g: \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^n$ będą przekształceniami liniowymi, których macierze to odpowiednio A i B .

Jaka jest macierz przekształcenia $h = f \circ g$? (Czyli „złożenia f z g — $h(\mathbf{v}) = \varphi(g(\mathbf{v}))$).

Przypomnienie jak doszliśmy do wzoru na mnożenie macierzy: $g(\mathbf{v})$ to $B \cdot \mathbf{v}$. Podobnie: $\varphi(g(\mathbf{v}))$ to $A \cdot (g(\mathbf{v})) = A \cdot (B \cdot \mathbf{v})$. Zatem:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nk} \end{pmatrix} \cdot \left(\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1m} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{k1} & b_{k2} & \cdots & b_{km} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_m \end{pmatrix} \right) \\ = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nk} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1 b_{11} + v_2 b_{12} + \cdots + v_m b_{1m} \\ v_1 b_{21} + v_2 b_{22} + \cdots + v_m b_{2m} \\ \vdots \\ v_1 b_{k1} + v_2 b_{k2} + \cdots + v_m b_{km} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nk} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1 b_{11} + v_2 b_{12} + \cdots + v_m b_{1m} \\ v_1 b_{21} + v_2 b_{22} + \cdots + v_m b_{2m} \\ \vdots \\ v_1 b_{k1} + v_2 b_{k2} + \cdots + v_m b_{km} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nk} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1 b_{11} + v_2 b_{12} + \cdots + v_m b_{1m} \\ v_1 b_{21} + v_2 b_{22} + \cdots + v_m b_{2m} \\ \vdots \\ v_1 b_{k1} + v_2 b_{k2} + \cdots + v_m b_{km} \end{pmatrix} = \mathbf{v}'$$

Oznaczmy wynikowy wektor przez $\mathbf{v}'$.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nk} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1 b_{11} + v_2 b_{12} + \cdots + v_m b_{1m} \\ v_1 b_{21} + v_2 b_{22} + \cdots + v_m b_{2m} \\ \vdots \\ v_1 b_{k1} + v_2 b_{k2} + \cdots + v_m b_{km} \end{pmatrix} = \mathbf{v}'$$

Oznaczmy wynikowy wektor przez $\mathbf{v}'$. Przyjźyjmy się jego i -tej współrzędnej:

$$\begin{aligned} v'_i &= a_{i1} (v_1 b_{11} + v_2 b_{12} + \cdots + v_m b_{1m}) \\ &\quad + a_{i2} (v_1 b_{21} + v_2 b_{22} + \cdots + v_m b_{2m}) \\ &\quad + \dots \\ &\quad + a_{ik} (v_1 b_{k1} + v_2 b_{k2} + \cdots + v_m b_{km}) \\ &= + (a_{i1} b_{11} + a_{i2} b_{21} + \cdots + a_{ik} b_{k1}) v_1 \\ &\quad + (a_{i1} b_{12} + a_{i2} b_{22} + \cdots + a_{ik} b_{k2}) v_2 \\ &\quad + \dots \\ &\quad + (a_{i1} b_{1m} + a_{im} b_{21} + \cdots + a_{ik} b_{km}) v_m \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \mathbf{v}'_i &= (a_{i1}b_{11} + a_{i2}b_{21} + \dots + a_{ik}b_{k1}) v_1 \\
 &\quad (a_{i1}b_{12} + a_{i2}b_{22} + \dots + a_{ik}b_{k2}) v_2 \\
 &\quad \dots \\
 &\quad (a_{i1}b_{1m} + a_{i2}b_{2m} + \dots + a_{ik}b_{km}) v_m
 \end{aligned}$$

Przy współrzędnej v_j wektora $\mathbf{v}$ w powyższym równaniu w nawiasie jest wyrażenie:

$$a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{ik}b_{kj}$$

$$\begin{aligned}
 v'_i &= (a_{i1}b_{11} + a_{i2}b_{21} + \dots + a_{ik}b_{k1}) v_1 \\
 &\quad (a_{i1}b_{12} + a_{i2}b_{22} + \dots + a_{ik}b_{k2}) v_2 \\
 &\quad \dots \\
 &\quad (a_{i1}b_{1m} + a_{i2}b_{2m} + \dots + a_{ik}b_{km}) v_m
 \end{aligned}$$

Przy współrzędnej v_j wektora $\mathbf{v}$ w powyższym równaniu w nawiasie jest wyrażenie:

$$a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{ik}b_{kj}$$

Przypomnijmy sobie wzór na mnożenie macierzy. Wartość w i -tym wierszu j -tej kolumny macierzy $A \cdot B$ to:

$$(c_{ij}) = (a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{ik}b_{kj})$$

$$\begin{aligned}
 v'_i &= (a_{i1}b_{11} + a_{i2}b_{21} + \dots + a_{ik}b_{k1}) v_1 \\
 &\quad (a_{i1}b_{12} + a_{i2}b_{22} + \dots + a_{ik}b_{k2}) v_2 \\
 &\quad \dots \\
 &\quad (a_{i1}b_{1m} + a_{i2}b_{2m} + \dots + a_{ik}b_{km}) v_m
 \end{aligned}$$

Przy współrzędnej v_j wektora $\mathbf{v}$ w powyższym równaniu w nawiasie jest wyrażenie:

$$a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{ik}b_{kj}$$

Przypomnijmy sobie wzór na mnożenie macierzy. Wartość w i -tym wierszu j -tej kolumny macierzy $A \cdot B$ to:

$$(c_{ij}) = (a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{ik}b_{kj})$$

Zatem gdy $C = A \cdot B$ to:

$$v'_i = c_{i1}v_1 + c_{i2}v_2 + \dots + c_{im}v_m$$

$$v'_i = c_{i1}v_1 + c_{i2}v_2 + \cdots + c_{im}v_m$$

W takim razie cały wektor $\mathbf{v}'$ możemy zapisać jako:

$$\mathbf{v}' = C \cdot \mathbf{v} = (A \cdot B)\mathbf{v}$$

Innymi słowy: macierz przekształcenia $f \circ g$ to $A \cdot B$.

$$v'_i = c_{i1}v_1 + c_{i2}v_2 + \dots + c_{im}v_m$$

W takim razie cały wektor $\mathbf{v}'$ możemy zapisać jako:

$$\mathbf{v}' = C \cdot \mathbf{v} = (A \cdot B)\mathbf{v}$$

Innymi słowy: macierz przekształcenia $f \circ g$ to $A \cdot B$.

Mnożenie macierzy a składanie przekształceń

Jeśli przekształcenia liniowe f, g mają macierze odpowiednio A, B to przekształcenie $h = f \circ g$ (czyli $h(\mathbf{v}) = \varphi(g(\mathbf{v}))$) ma macierz^a $A \times B$.

Składanie przekształceń odpowiada mnożeniu macierzy!

^aO ile h jest w ogóle dobrze określone to znaczy obraz g leży w dziedzinie f ; innymi słowy „jeśli wymiary się zgadzają”.

Własności mnożenia macierzy

Skoro mnożenie macierzy odpowiada składaniu przekształceń, to jest łączne, czyli:

$$(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$$

To pozwala nam ograniczyć pisanie nawiasów i pisać po prostu:

$$A \cdot B \cdot C$$

Własności mnożenia macierzy

Skoro mnożenie macierzy odpowiada składaniu przekształceń, to jest łączne, czyli:

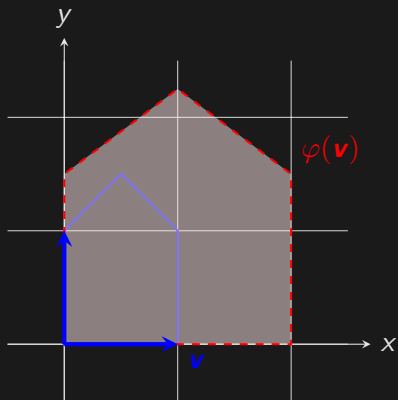
$$(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$$

To pozwala nam ograniczyć pisanie nawiasów i pisać po prostu:

$$A \cdot B \cdot C$$

Mnożenie macierzy nie jest natomiast przemienne.

Przykłady 2D: Skalowanie (jednokładność)



Rozciąganie/ściąganie wzdłuż osi.

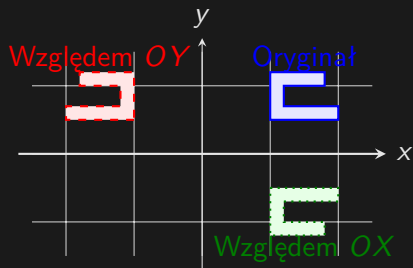
$$\varphi((x, y)) = (s_x \cdot x, s_y \cdot y)$$

Macierz przekształcenia:

$$A = \begin{pmatrix} s_x & 0 \\ 0 & s_y \end{pmatrix}$$

Na rysunku: $s_x = 2$, $s_y = 1.5$

Przykłady 2D: Symetria osiowa



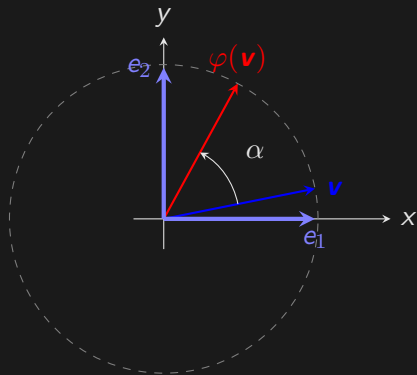
Macierz symetrii względem osi OX
(zmienia znak y):

$$A_{OX} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Macierz symetrii względem osi OY
(zmienia znak x):

$$A_{OY} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Przykłady 2D: Obrót wokół początku układu



Obrót przeciwnie do ruchu wskazówek zegara o kąt α .

Wyprowadzenie:

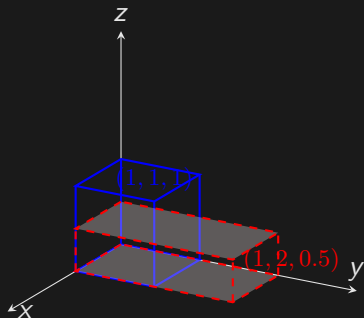
$$\varphi((1, 0)) = (\cos \alpha, \sin \alpha)$$

$$\varphi((0, 1)) = (-\sin \alpha, \cos \alpha)$$

Macierz obrotu:

$$R_{\alpha} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$$

Przykłady 3D: Skalowanie



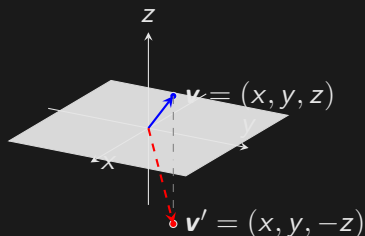
$$\varphi((x, y, z)) = (s_x x, s_y y, s_z z)$$

Macierz przekształcenia:

$$A = \begin{pmatrix} s_x & 0 & 0 \\ 0 & s_y & 0 \\ 0 & 0 & s_z \end{pmatrix}$$

Na rysunku: $s_x = 1, s_y = 2, s_z = 0.5$

Przykłady 3D: Symetria względem płaszczyzn XY, YZ, XZ

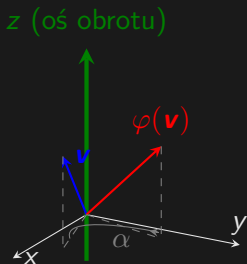


Przekształcenie zmienia znak współrzędnej prostopadłej do płaszczyzny.

Symetria względem płaszczyzny XY ($z \rightarrow -z$):

$$A_{XY} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Przykłady 3D: Obrót wokół osi OZ



Współrzędna z pozostaje bez zmian.
Płaszczyzny równoległe do XY
obracają się jak w 2D.

Macierz obrotu wokół osi OZ :

$$R_{Z,\alpha} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Dla obrotów wokół OX lub OY jedynka w

macierzy przesuwa się odpowiednio na
pozycję a_{11} lub a_{22} .