

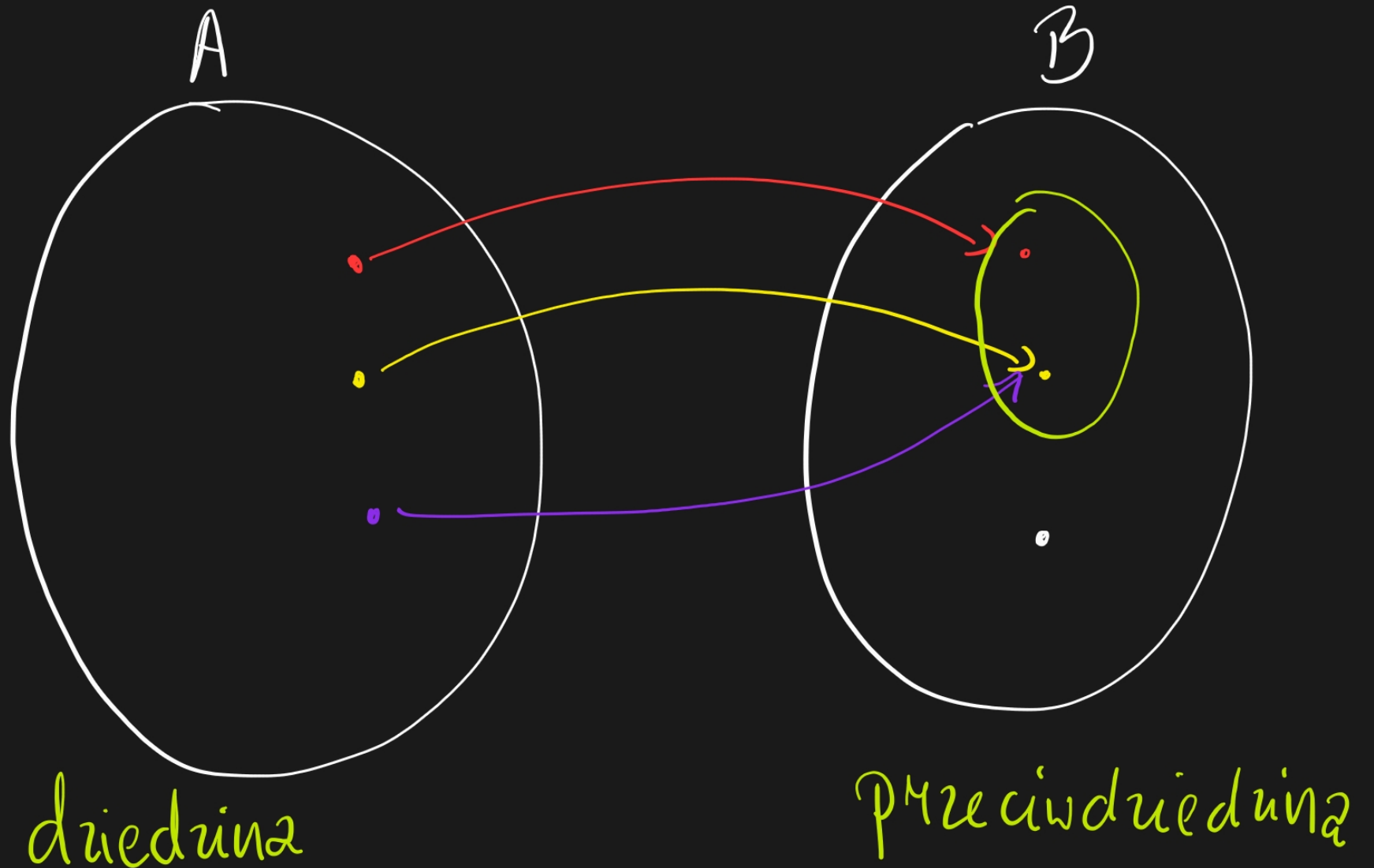
Co to jest przekształcenie liniowe?

Matematyka dla ciekawych świata XVII

Daniel Laskowski

23 marca 2026

Powtórzenie ze szkoły



Przekształcenie liniowe

Definicja (przekształcenie liniowe)

Przekształceniem liniowym nazywamy funkcję $\varphi : V \rightarrow W$, gdzie V i W są przestrzeniami liniowymi, spełniającą własności:

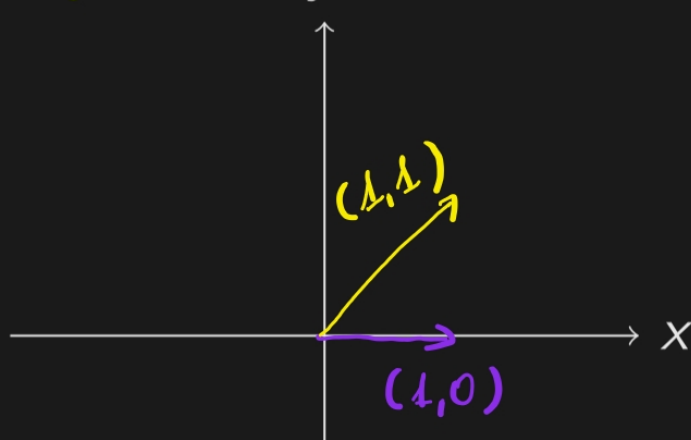
$$1^\circ \quad \varphi(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = \varphi(\mathbf{x}) + \varphi(\mathbf{y}),$$

$$2^\circ \quad \varphi(c\mathbf{x}) = c\varphi(\mathbf{x}).$$

Jak opisać przekształcenie liniowe?

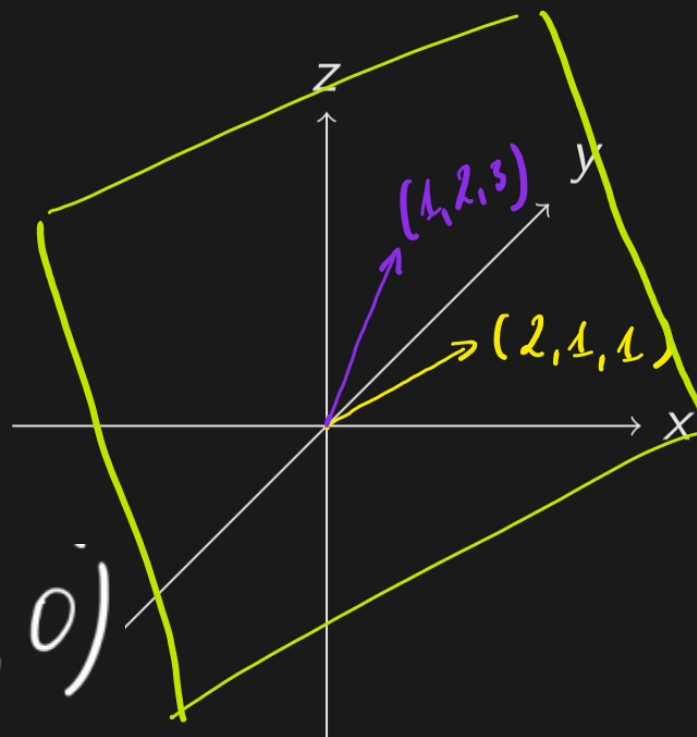
$$\varphi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$A = ((1,1), (1,0))$$



$$\varphi((1,1)) = (2,1,1)$$

$$\varphi((1,0)) = (1,2,3)$$



$$(x_1, x_2) = \underbrace{x_2}_{\text{coefficient}} \cdot (1,1) + (x_1 - x_2) \cdot (1,0)$$

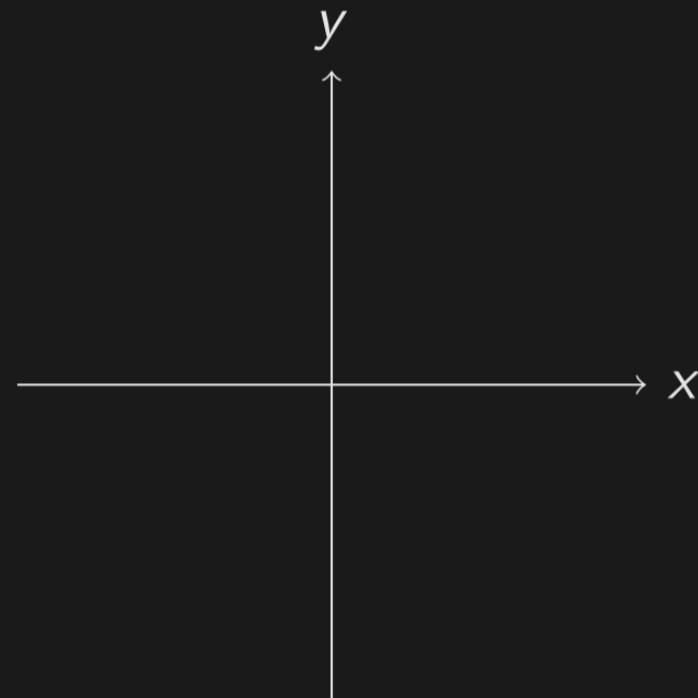
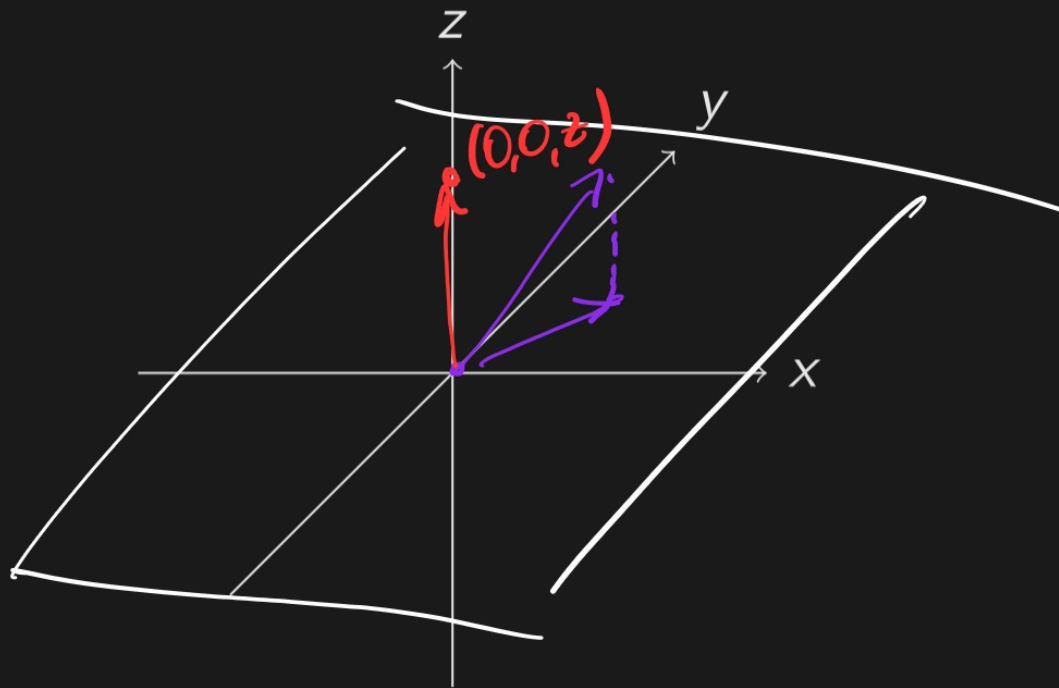
$$\varphi((x_1, x_2)) = \varphi(x_2 \cdot (1,1) + (x_1 - x_2) \cdot (1,0)) = x_2 \varphi((1,1)) + (x_1 - x_2) \cdot \varphi((1,0)) =$$

$$= x_2 (2,1,1) + (x_1 - x_2) \cdot (1,2,3)$$

$$= (x_2 + x_1, 2x_1 - x_2, 3x_1 - 2x_2)$$

Jak opisać przekształcenie liniowe?

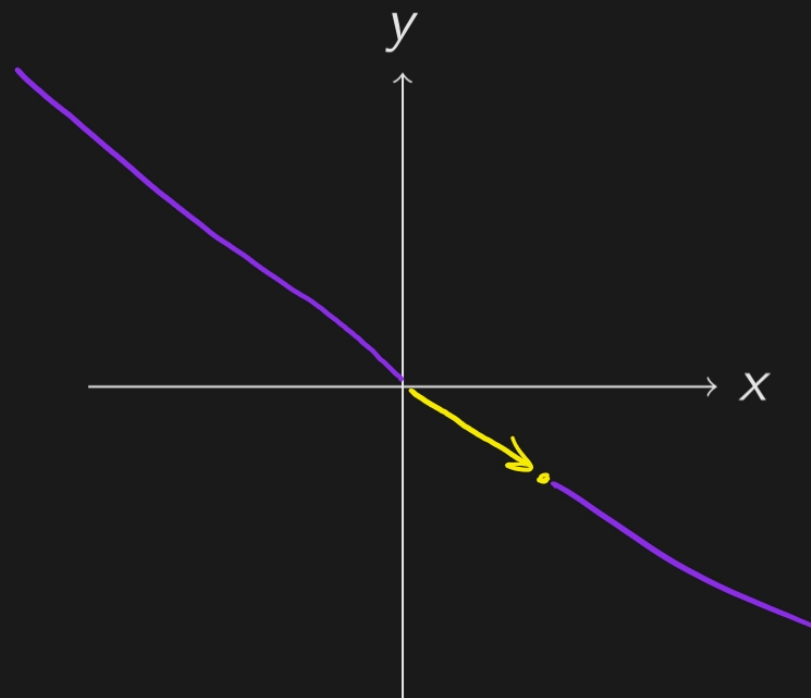
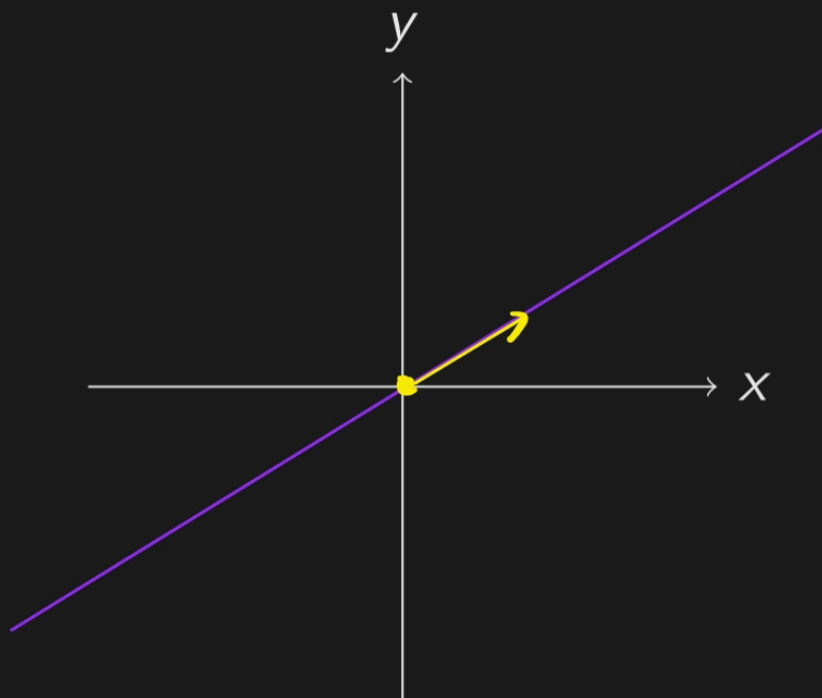
$$\varphi: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$$



$$\varphi((x_1, x_2, x_3)) = (x_1, x_2)$$

Jeszcze jeden przykład

$$\varphi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$



$$\varphi((x_1, x_2)) = (x_1, -x_2)$$

Jądro i obraz przekształcenia

$$\varphi((x_1, x_2, x_3)) = (x_1 + x_2, x_2 + x_3, x_3)$$

Definicja (jądro)

Jądrem przekształcenia liniowego $\varphi : V \rightarrow W$ nazywamy zbiór:

$$\ker \varphi := \{x \in V : \varphi(x) = 0\}.$$

$$(x_1 + x_2, x_2 + x_3, x_3) = \mathbf{0} = (0, 0, 0)$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ x_2 + x_3 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases}$$

Jądro i obraz przekształcenia

$$\varphi: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 \\ ((1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1))$$

Definicja (jądro)

Jądrem przekształcenia liniowego $\varphi: V \rightarrow W$ nazywamy zbiór:

$$\ker \varphi := \{ \mathbf{x} \in V : \varphi(\mathbf{x}) = 0 \}.$$

Definicja (obraz)

Obrazem przekształcenia liniowego $\varphi: V \rightarrow W$ nazywamy zbiór:

$$\operatorname{Im} \varphi := \{ \varphi(\mathbf{x}) : \mathbf{x} \in V \}.$$

$$\operatorname{Span} \left(\varphi(1, 0, 0), \varphi(0, 1, 0), \varphi(0, 0, 1) \right)$$

Jak inaczej opisać przekształcenie liniowe?

Definicja (macierz przekształcenia liniowego)

Niech $\varphi : V \rightarrow W$ będzie przekształceniem liniowym, a $\mathcal{A} := (\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n)$ i $\mathcal{B} := (\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \dots, \mathbf{y}_n)$ będą odpowiednio bazami V i W . *Macierzą przekształcenia liniowego φ w bazach $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$ nazywamy macierz, której kolumnami są współrzędne wektorów $\varphi(\mathbf{x}_1), \varphi(\mathbf{x}_2), \dots, \varphi(\mathbf{x}_n)$ zapisane w bazie $\mathcal{B}$.*

Macierz w praktyce $\varphi: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$

$$\text{st. w } \mathbb{R}^3 = ((1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1))$$

$$\text{st. w } \mathbb{R}^2 = ((1, 0), (0, 1))$$

$$\varphi((x_1, x_2, x_3)) = (2x_1 + x_2 - x_3, x_1 - x_2 + x_3)$$

$$\varphi((1, 0, 0)) = (2, 1)$$

Macierz w praktyce

$$\varphi((x_1, x_2, x_3)) = (\underbrace{2x_1 + x_2 - x_3}_{0+1-0=\underline{1}}, \underbrace{x_1 - x_2 + x_3}_{0-1+0=\underline{-1}})$$

$$\varphi((1, 0, 0)) = (2, 1)$$

Macierz w praktyce

$$\varphi((x_1, x_2, x_3)) = (2x_1 + x_2 - x_3, x_1 - x_2 + x_3)$$

$$\varphi((1, 0, 0)) = (2, 1)$$

$$\varphi((0, 1, 0)) = (1, -1)$$

Macierz w praktyce

$$\varphi((x_1, x_2, x_3)) = (2x_1 + x_2 - x_3, x_1 - x_2 + x_3)$$

$$\varphi((1, 0, 0)) = (2, 1) = 2 \cdot (1, 0) + 1(0, 1)$$

$$\varphi((0, 1, 0)) = (1, -1)$$

$$\varphi((0, 0, 1)) = (-1, 1)$$

$$M(\varphi)_{st.}^{st.} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Macierz w praktyce

$$\varphi((x_1, x_2, x_3)) = (2x_1 + x_2 - x_3, x_1 - x_2 + x_3)$$

$$\varphi((1, 0, 1)) = (1, 2)$$

$$\varphi((1, 0, 0)) = (2, 1)$$

$$\varphi((0, 1, 0)) = (1, -1)$$

$$\varphi((0, 0, 1)) = (-1, 1)$$

$$M(\varphi)_{\text{st}}^{\text{st}} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Macierz w praktyce

$$\varphi((x_1, x_2, x_3)) = (2x_1 + x_2 - x_3, x_1 - x_2 + x_3)$$

$$\varphi((1, 0, 0)) = (2, 1)$$

$$\varphi((0, 1, 0)) = (1, -1)$$

$$\varphi((0, 0, 1)) = (-1, 1)$$

$$M(\varphi)_{st}^{st} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\varphi((1, 0, 1)) = (1, 2)$$

$$\varphi((0, 1, 2)) = (-1, 1)$$

Macierz w praktyce

$$\mathcal{A} = ((1, 0, 1), (0, 1, 2), (2, 1, 0))$$

$$\mathcal{B} = ((0, 1), (3, 0))$$

$$\varphi((x_1, x_2, x_3)) = (2x_1 + x_2 - x_3, x_1 - x_2 + x_3)$$

$$\varphi((1, 0, 0)) = (2, 1)$$

$$\varphi((0, 1, 0)) = (1, -1)$$

$$\varphi((0, 0, 1)) = (-1, 1)$$

$$M(\varphi)_{\mathcal{B}\mathcal{A}}^{\text{st}} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\varphi((1, 0, 1)) = (1, 2) =$$

$$= \underline{2} \cdot (0, 1) + \underline{\frac{1}{3}} \cdot (3, 0)$$

$$\varphi((0, 1, 2)) = (-1, 1) =$$

$$= \underline{1} \cdot (0, 1) + \underline{-\frac{1}{3}} \cdot (3, 0)$$

$$\varphi((2, 1, 0)) = (5, 1) =$$

$$= \underline{1} \cdot (0, 1) + \underline{\frac{5}{3}} \cdot (3, 0)$$

$$M(\varphi)_{\mathcal{B}\mathcal{A}}^{\text{st}} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{5}{3} \end{pmatrix}$$

Macierz w praktyce

$$\varphi((x_1, x_2, x_3)) = (2x_1 + x_2 - x_3, x_1 - x_2 + x_3)$$

$$\varphi((1, 0, 0)) = (2, 1)$$

$$\varphi((0, 1, 0)) = (1, -1)$$

$$\varphi((0, 0, 1)) = (-1, 1)$$

$$M(\varphi)_{\text{st}}^{\text{st}} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\varphi((1, 0, 1)) = (1, 2)$$

$$\varphi((0, 1, 2)) = (-1, 1)$$

$$\varphi((2, 1, 0)) = (5, 1)$$

$$M(\varphi)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{5}{3} \end{pmatrix}.$$

Po co macierze?

$$\varphi((x_1, x_2, x_3)) = (2x_1 + x_2 - x_3, x_1 - x_2 + x_3)$$

Po co macierze?

$$\varphi((x_1, x_2, x_3)) = (2x_1 + x_2 - x_3, x_1 - x_2 + x_3)$$

$$\varphi((3, -1, 1)) = ?$$

Po co macierze?

$$\varphi((x_1, x_2, x_3)) = (2x_1 + x_2 - x_3, x_1 - x_2 + x_3)$$

$$\varphi(\underline{(3, -1, 1)}) = ?$$

$$\varphi((3, -1, 1)) = (2 \cdot 3 + (-1) - 1, 3 - (-1) + 1) = (4, 5)$$

$$\begin{aligned} \varphi(\underline{(3, -1, 1)}) &= M(\varphi)_{st.}^{st.} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{2} & 1 & -1 \\ \underline{1} & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \underline{3} \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 2 \cdot 3 + 1 \cdot (-1) + (-1) \cdot 1 \\ \underline{1 \cdot 3 + (-1) \cdot (-1) + 1 \cdot 1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Po co macierze?

$$\varphi((x_1, x_2, x_3)) = (2x_1 + x_2 - x_3, x_1 - x_2 + x_3)$$

$$\varphi((3, -1, 1)) = ?$$

$$\varphi((3, -1, 1)) = (2 \cdot 3 + (-1) - 1, 3 - (-1) + 1) = (4, 5)$$

$$\varphi((3, -1, 1)) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 3 + (-1) - 1 \\ 3 - (-1) + 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}$$