

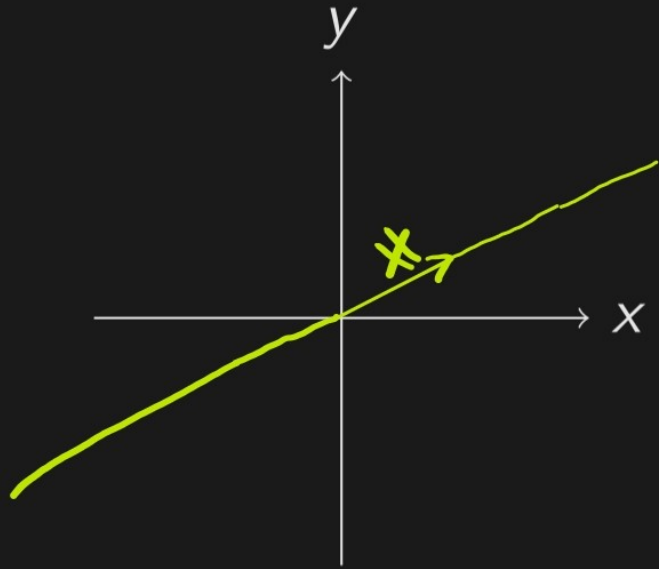
Co to jest przestrzeń liniowa?

Matematyka dla ciekawych świata XVII

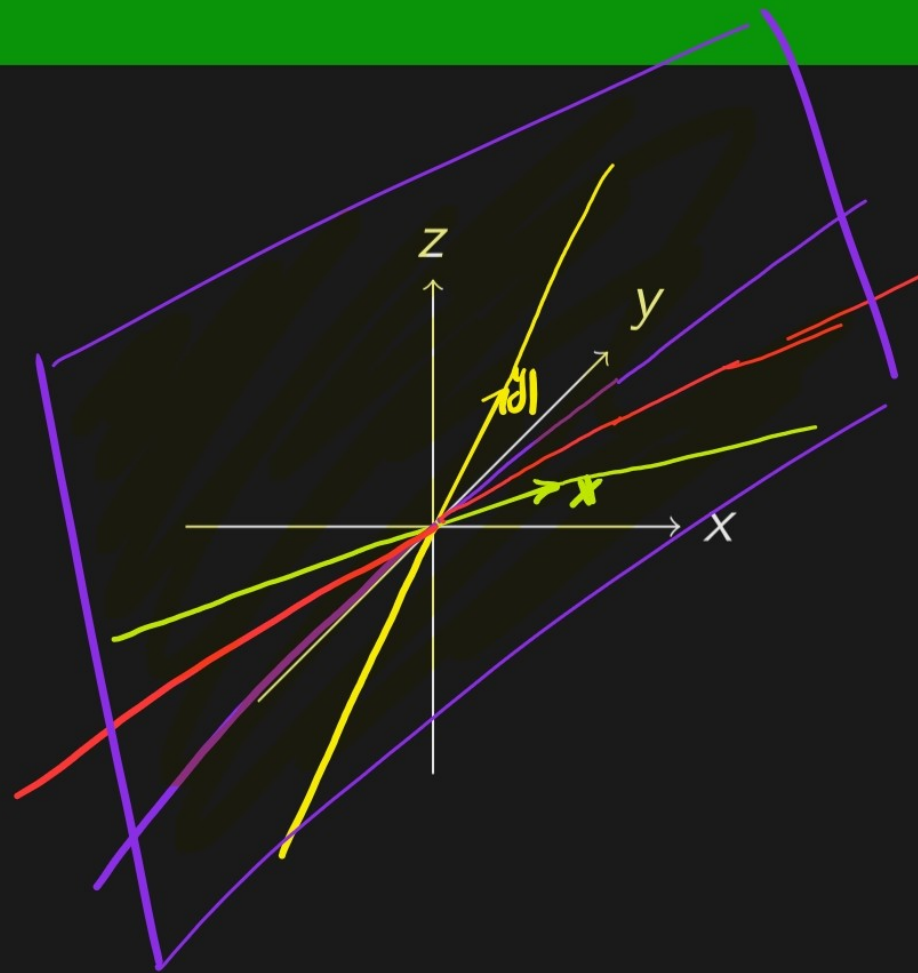
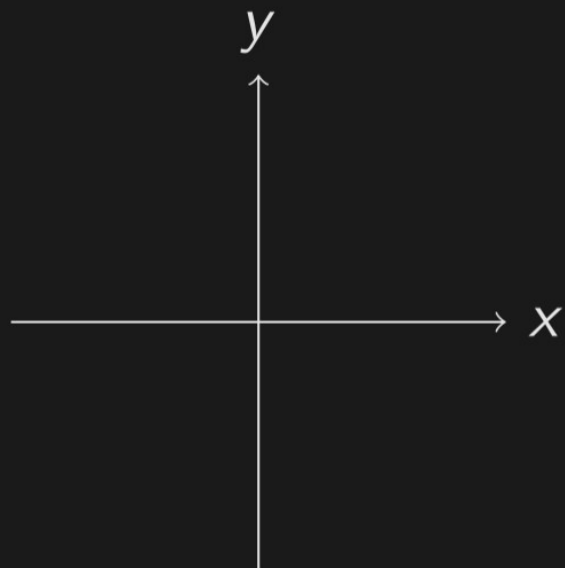
Daniel Laskowski

16 marca 2026

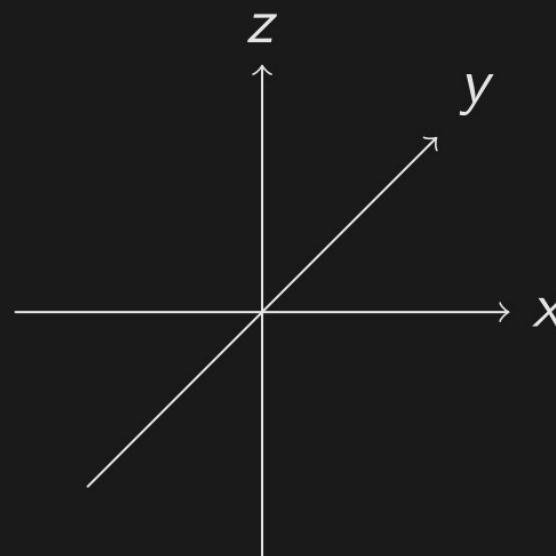
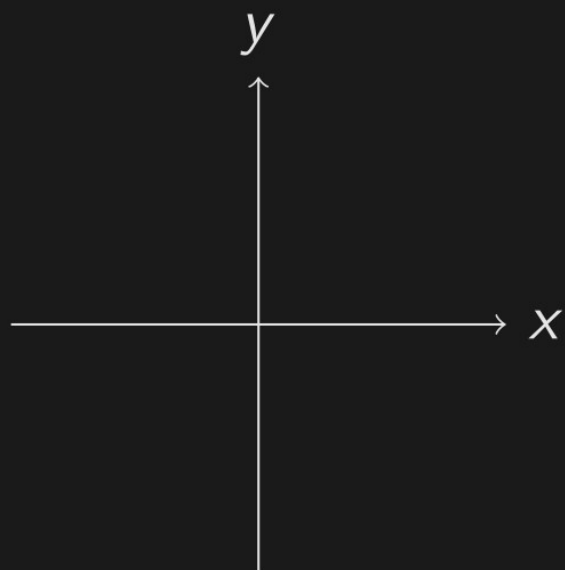
Proste przykłady



Proste przykłady



Proste przykłady



Definicja (kombinacja liniowa)

Kombinacją liniową nazywamy wyrażenie, będące sumą skończonej liczby wektorów pomnożonych przez skalary:

$$\mathbf{y} = c_1 \mathbf{x}_1 + c_2 \mathbf{x}_2 + \dots + c_n \mathbf{x}_n.$$

Przestrzeń liniowa

Definicja (przestrzeń liniowa)

Przestrzenią liniową V nazywamy zbiór wektorów, zawierający wektor 0 , na którym zdefiniowano dodawanie i mnożenie przez skalar spełniające:

1° łączność dodawania:

$$\mathbf{x} + (\mathbf{y} + \mathbf{z}) = (\mathbf{x} + \mathbf{y}) + \mathbf{z},$$

2° przemienność dodawania:

$$\mathbf{x} + \mathbf{y} = \mathbf{y} + \mathbf{x},$$

3° wektor 0 jest elementem neutralnym dodawania, tzn.

$$\mathbf{x} + 0 = 0 + \mathbf{x} = \mathbf{x},$$

4° dla dowolnego wektora istnieje wektor przeciwny, tzn.

$$\forall \mathbf{x} \in V \exists \mathbf{v} \in V : \mathbf{x} + \mathbf{v} = 0,$$

5° rozdzielność mnożenia względem dodawania wektorów:

$$c(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = c\mathbf{x} + c\mathbf{y},$$

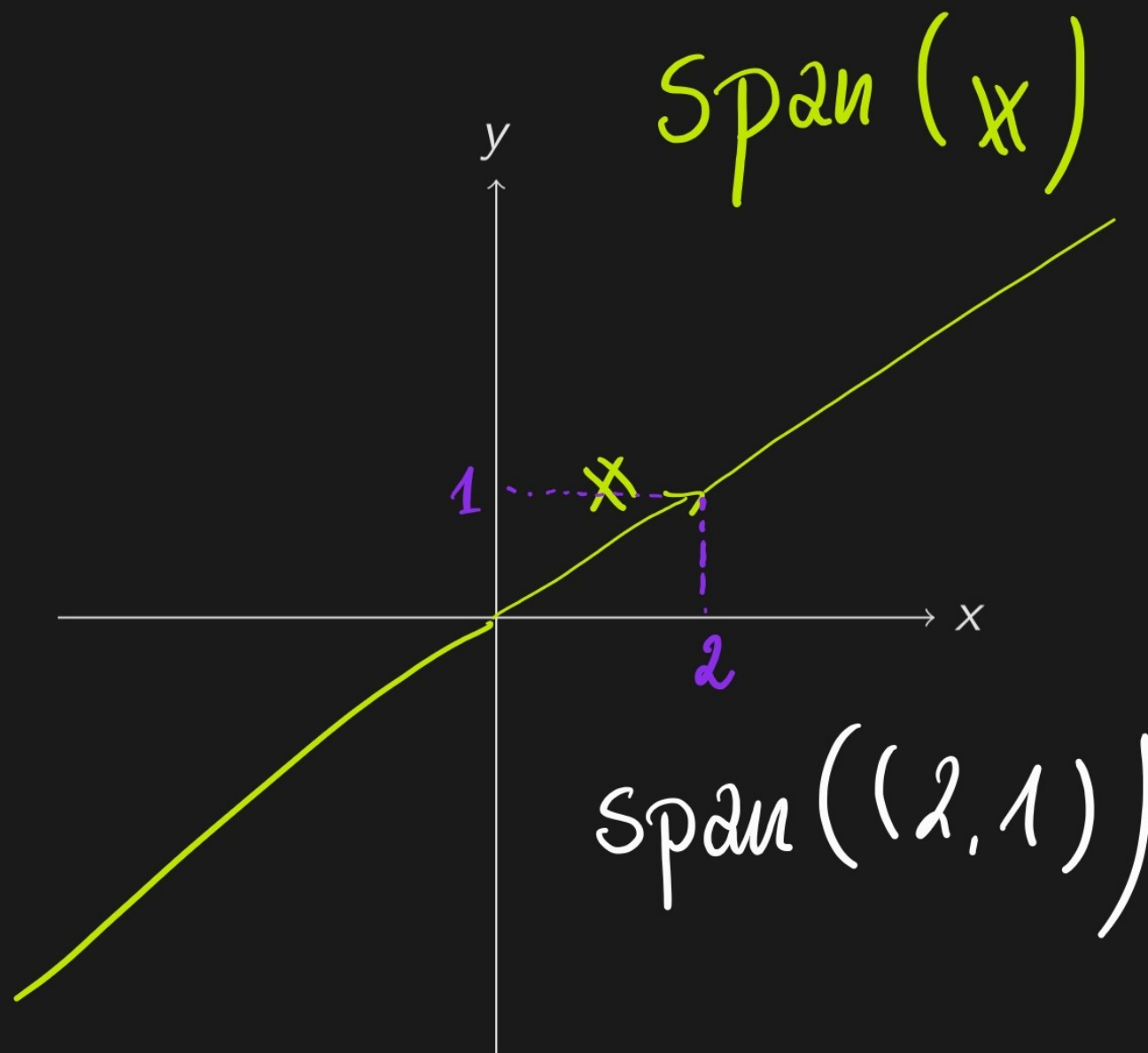
6° rozdzielność mnożenia względem dodawania skalarów:

$$(c + d)\mathbf{x} = c\mathbf{x} + d\mathbf{x},$$

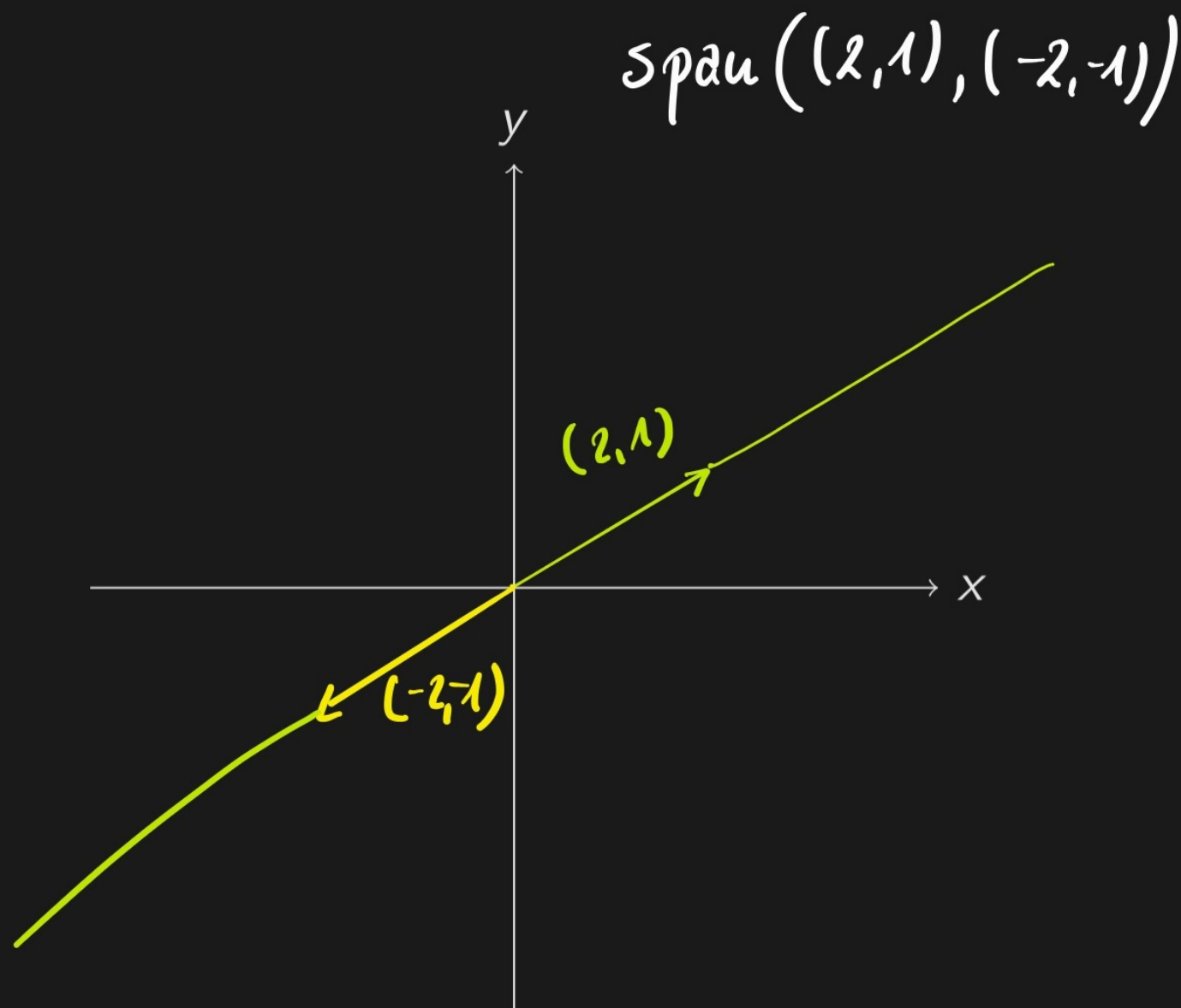
7° łączność mnożenia przez skalary: $(cd)\mathbf{x} = c(d\mathbf{x})$,

8° 1 jest elementem neutralnym mnożenia, tzn. $1\mathbf{x} = \mathbf{x}$.

Jak opisać przestrzeń liniową?



Jak opisać przestrzeń liniową?



Liniowa niezależność

Definicja (układ liniowo zależny)

Układ wektorów $(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n)$ jest *liniowo zależny*, gdy któryś z wektorów daje się zapisać jako kombinacja liniowa pozostałych.

Liniowa niezależność

Definicja (układ liniowo zależny)

Układ wektorów $(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n)$ jest *liniowo zależny*, gdy któryś z wektorów daje się zapisać jako kombinacja liniowa pozostałych.

Liniowa zależność w praktyce

W praktyce układ jest liniowo zależny, gdy równanie:

$$c_1 \mathbf{x}_1 + c_2 \mathbf{x}_2 + \dots + c_n \mathbf{x}_n = 0$$

ma rozwiązanie.

c_u - niewiadome

$\mathbf{x}_u$ - wiadome

Liniowa niezależność

Definicja (układ liniowo zależny)

Układ wektorów $(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n)$ jest *liniowo zależny*, gdy któryś z wektorów daje się zapisać jako kombinacja liniowa pozostałych.

Liniowa zależność w praktyce

W praktyce układ jest liniowo zależny, gdy równanie:

$$c_1 \mathbf{x}_1 + c_2 \mathbf{x}_2 + \dots + c_n \mathbf{x}_n = 0$$

ma rozwiązanie.

Definicja (układ liniowo niezależny)

Układ wektorów $(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n)$ jest *liniowo zależny*, gdy nie jest liniowo zależny.

Jak inaczej opisać przestrzeń liniową?

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 + 3x_4 = 0 \\ 2x_1 + 5x_2 + 4x_3 + 4x_4 = 0 \\ x_1 + 3x_2 + 3x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & 0 \\ 2 & 5 & 4 & 4 & 0 \\ 1 & 3 & 3 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[\omega_3 - \omega_1]{\omega_2 - 2\omega_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -2 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\omega_3 - \omega_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\omega_1 - 2\omega_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & 7 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$x_1 - 3x_3 + 7x_4 = 0$$

Jak inaczej opisać przestrzeń liniową?

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 + 3x_4 = 0 \\ 2x_1 + 5x_2 + 4x_3 + 4x_4 = 0 \\ x_1 + 3x_2 + 3x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = 3x_3 - 7x_4 \\ x_2 = -2x_3 + 2x_4 \end{cases}$$

$$\text{span} \left((3, -2, 1, 0), (-7, 2, 0, 1) \right)$$

Jak inaczej opisać przestrzeń liniową?

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 + 3x_4 = 0 \\ 2x_1 + 5x_2 + 4x_3 + 4x_4 = 0 \\ x_1 + 3x_2 + 3x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = 3x_3 - x_4 \\ x_2 = -x_3 + 2x_4 \end{cases}$$

~~$\text{span}((3, -2, 1, 0), (1, 2, 0, 1))$~~

Układ rozpinający a układ równań

$$\begin{cases} c_1 = -c_3 - 2c_4 \\ c_2 = c_3 + c_4 \end{cases}$$

span $((1, 2, -1, 0), (1, -1, 2, 3))$

$$c_1 x_1 + c_2 x_2 + c_3 x_3 + c_4 x_4 = 0$$

$$\begin{cases} c_1 + 2c_2 - c_3 = 0 \\ c_1 - c_2 + 2c_3 + 3c_4 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 3 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{W_2 - W_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 3 & 3 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{W_2: (-1/3)} \\ \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{W_1 - 2W_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Układ rozpinający a układ równań

$$\text{span}((1, 2, -1, 0), (1, -1, 2, 3))$$

$$\begin{cases} c_1 + 2c_2 - c_3 = 0 \\ c_1 - c_2 + 2c_3 + 3c_4 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} c_1 = -c_3 - 2c_4 \\ c_2 = c_3 + c_4 \end{cases}$$

$$\underline{-1, 1, 1, 0}$$

$$\underline{-2, 1, 0, 1}$$

$$\begin{cases} \underline{-x_1} + \underline{x_2} + \underline{x_3} = 0 \\ \underline{-2x_1} + \underline{x_2} + \underline{} + \underline{x_4} = 0 \end{cases}$$

Baza przestrzeni liniowej

Definicja (baza przestrzeni liniowej)

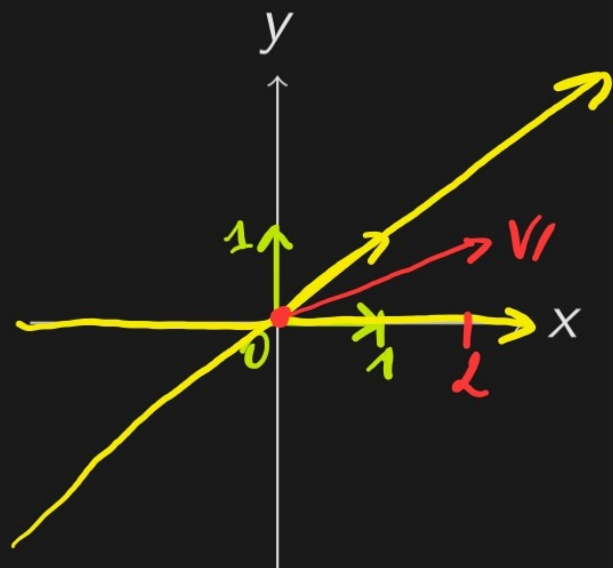
Bazą przestrzeni liniowej V nazywamy liniowo niezależny układ rozpinający V .

Baza przestrzeni liniowej

Definicja (baza przestrzeni liniowej)

Bazą przestrzeni liniowej V nazywamy liniowo niezależny układ rozpinający V .

$$\mathbb{R}^2 = \text{span}((1,0), (0,1)) = \text{span}((1,0), (1,1))$$



$$v1 = 2 \cdot (1,0) + 1 \cdot (0,1) =$$

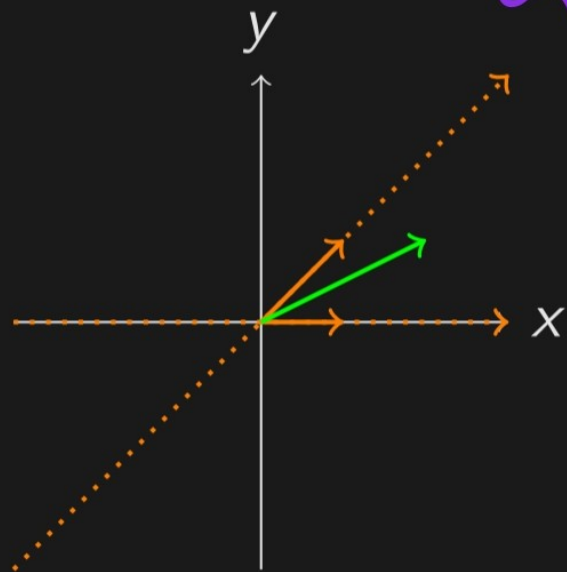
$$= \underline{1} \cdot (1,0) + \underline{1} \cdot (1,1)$$

$$v1 = (2,1)$$

Baza przestrzeni liniowej

Definicja (baza przestrzeni liniowej)

Bazą przestrzeni liniowej V nazywamy liniowo niezależny układ rozpinający V .



$A \neq B$

$$A = ((1, 1), (1, 0))$$

$$B = ((1, 0), (1, 1))$$

$$(2, 1) = 1 \cdot (1, 0) + 1 \cdot (1, 1)$$

$$(2, 1) = (2, 1)_{\text{st}} = (1, 1)_B$$

Definicja (wymiar przestrzeni liniowej)

Liczba wektorów w bazie określa *wymiar przestrzeni liniowej*.