

Co to jest iloczyn skalarny?

Matematyka dla ciekawych świata XVII

Daniel Laskowski

25 maja 2026

Dawno, dawno temu...

Definicja (standardowy iloczyn skalarny)

Standardowym iloczynem skalarnym dwóch wektorów nazywamy:

$$\mathbf{x} \circ \mathbf{y} = x_1y_1 + x_2y_2 + \dots + x_ny_n.$$

Dawno, dawno temu...

Definicja (standardowy iloczyn skalarny)

Standardowym iloczynem skalarnym dwóch wektorów nazywamy:

$$\mathbf{x} \circ \mathbf{y} = x_1y_1 + x_2y_2 + \dots + x_ny_n.$$

Iloczyn skalarny a prostopadłość

Powiemy, że wektor $\mathbf{x}$ i $\mathbf{y}$ są prostopadłe wtedy i tylko wtedy, gdy:

$$\mathbf{x} \circ \mathbf{y} = 0.$$

Iloczyn skalarny

$$\langle x, y \rangle$$

Definicja (iloczyn skalarny)

Niech V będzie przestrzenią liniową. Powiemy, że funkcja

$\langle \cdot, \cdot \rangle : \underbrace{V \times V}_{\text{wzrost}} \rightarrow \mathbb{R}$ jest *iloczynem skalarnym*, gdy dla dowolnych wektorów $x, \tilde{x}, y, \tilde{y} \in V$ oraz liczb $a, b \in \mathbb{R}$ zachodzi:

Iloczyn skalarny

Definicja (iloczyn skalarny)

Niech V będzie przestrzenią liniową. Powiemy, że funkcja $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ jest *iloczynem skalarnym*, gdy dla dowolnych wektorów $\mathbf{x}, \tilde{\mathbf{x}}, \mathbf{y}, \tilde{\mathbf{y}} \in V$ oraz liczb $a, b \in \mathbb{R}$ zachodzi:

$$1^\circ \quad \langle a\mathbf{x} + b\tilde{\mathbf{x}}, \mathbf{y} \rangle = a\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle + b\langle \tilde{\mathbf{x}}, \mathbf{y} \rangle,$$

Iloczyn skalarny

Definicja (iloczyn skalarny)

Niech V będzie przestrzenią liniową. Powiemy, że funkcja $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ jest *iloczynem skalarnym*, gdy dla dowolnych wektorów $\mathbf{x}, \tilde{\mathbf{x}}, \mathbf{y}, \tilde{\mathbf{y}} \in V$ oraz liczb $a, b \in \mathbb{R}$ zachodzi:

$$1^\circ \langle a\mathbf{x} + b\tilde{\mathbf{x}}, \mathbf{y} \rangle = a \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle + b \langle \tilde{\mathbf{x}}, \mathbf{y} \rangle,$$

$$2^\circ \langle \mathbf{x}, a\mathbf{y} + b\tilde{\mathbf{y}} \rangle = a \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle + b \langle \mathbf{x}, \tilde{\mathbf{y}} \rangle,$$

Iloczyn skalarny

Definicja (iloczyn skalarny)

Niech V będzie przestrzenią liniową. Powiemy, że funkcja $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ jest *iloczynem skalarnym*, gdy dla dowolnych wektorów $\mathbf{x}, \tilde{\mathbf{x}}, \mathbf{y}, \tilde{\mathbf{y}} \in V$ oraz liczb $a, b \in \mathbb{R}$ zachodzi:

$$1^\circ \langle a\mathbf{x} + b\tilde{\mathbf{x}}, \mathbf{y} \rangle = a \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle + b \langle \tilde{\mathbf{x}}, \mathbf{y} \rangle,$$

$$2^\circ \langle \mathbf{x}, a\mathbf{y} + b\tilde{\mathbf{y}} \rangle = a \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle + b \langle \mathbf{x}, \tilde{\mathbf{y}} \rangle,$$

$$3^\circ \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle,$$

Iloczyn skalarny

Definicja (iloczyn skalarny)

Niech V będzie przestrzenią liniową. Powiemy, że funkcja $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ jest *iloczynem skalarnym*, gdy dla dowolnych wektorów $\mathbf{x}, \tilde{\mathbf{x}}, \mathbf{y}, \tilde{\mathbf{y}} \in V$ oraz liczb $a, b \in \mathbb{R}$ zachodzi:

$$1^\circ \langle a\mathbf{x} + b\tilde{\mathbf{x}}, \mathbf{y} \rangle = a \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle + b \langle \tilde{\mathbf{x}}, \mathbf{y} \rangle,$$

$$2^\circ \langle \mathbf{x}, a\mathbf{y} + b\tilde{\mathbf{y}} \rangle = a \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle + b \langle \mathbf{x}, \tilde{\mathbf{y}} \rangle,$$

$$3^\circ \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle,$$

$$4^\circ \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle > 0, \text{ gdy } \mathbf{x} \neq 0.$$

Iloczyn skalarny

$$x_1 y_1 + x_2 y_2$$

Definicja (iloczyn skalarny)

Niech V będzie przestrzenią liniową. Powiemy, że funkcja $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ jest *iloczynem skalarnym*, gdy dla dowolnych wektorów $\mathbf{x}, \tilde{\mathbf{x}}, \mathbf{y}, \tilde{\mathbf{y}} \in V$ oraz liczb $a, b \in \mathbb{R}$ zachodzi:

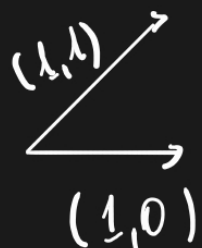
$$1^\circ \langle a\mathbf{x} + b\tilde{\mathbf{x}}, \mathbf{y} \rangle = a\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle + b\langle \tilde{\mathbf{x}}, \mathbf{y} \rangle,$$

$$2^\circ \langle \mathbf{x}, a\mathbf{y} + b\tilde{\mathbf{y}} \rangle = a\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle + b\langle \mathbf{x}, \tilde{\mathbf{y}} \rangle,$$

$$3^\circ \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle,$$

$$4^\circ \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle > 0, \text{ gdy } \mathbf{x} \neq 0.$$

$$\langle (x_1, x_2), (y_1, y_2) \rangle = x_1 y_1 - x_1 y_2 - x_2 y_1 + 2x_2 y_2$$



$$\langle (1, 0), (1, 1) \rangle = 1 - 1 - 0 + 2 \cdot 0 = 0$$

Iloczyn skalarny

Definicja (iloczyn skalarny)

Niech V będzie przestrzenią liniową. Powiemy, że funkcja $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ jest *iloczynem skalarnym*, gdy dla dowolnych wektorów $\mathbf{x}, \tilde{\mathbf{x}}, \mathbf{y}, \tilde{\mathbf{y}} \in V$ oraz liczb $a, b \in \mathbb{R}$ zachodzi:

$$1^\circ \langle a\mathbf{x} + b\tilde{\mathbf{x}}, \mathbf{y} \rangle = a\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle + b\langle \tilde{\mathbf{x}}, \mathbf{y} \rangle,$$

$$2^\circ \langle \mathbf{x}, a\mathbf{y} + b\tilde{\mathbf{y}} \rangle = a\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle + b\langle \mathbf{x}, \tilde{\mathbf{y}} \rangle,$$

$$3^\circ \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle,$$

$$4^\circ \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle > 0, \text{ gdy } \mathbf{x} \neq 0.$$

$$\langle (x_1, x_2), (y_1, y_2) \rangle = x_1y_1 - x_1y_2 - x_2y_1 + 2x_2y_2$$



Definicja (norma wektora)

Wyrażenie $\|\mathbf{x}\| = \sqrt{\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle}$ nazywamy *normą wektora $\mathbf{x}$* .

Macierz iloczynu skalarnego

$$\langle (x_1, x_2), (y_1, y_2) \rangle = x_1 y_1 - x_1 y_2 - x_2 y_1 + 2x_2 y_2$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Macierz iloczynu skalarnego

$$A \cdot B = B \cdot A \quad ?$$

$$A(B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C \quad \checkmark$$

$$\langle (x_1, x_2), (y_1, y_2) \rangle = x_1 y_1 - x_1 y_2 - x_2 y_1 + 2x_2 y_2$$

$$(x_1 \ x_2) \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

Macierz iloczynu skalarnego

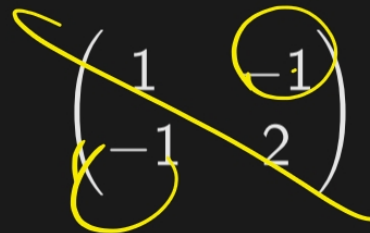
$$\langle (x_1, x_2), (y_1, y_2) \rangle = x_1 y_1 - x_1 y_2 - x_2 y_1 + 2x_2 y_2$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

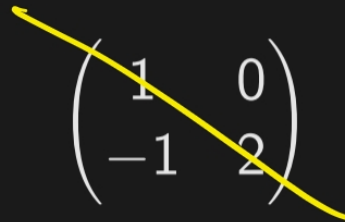
$$\langle (x_1, x_2), (y_1, y_2) \rangle = x_1 y_1 - x_2 y_1 + 2x_2 y_2$$

Macierz iloczynu skalarnego

$$\langle (x_1, x_2), (y_1, y_2) \rangle = x_1 y_1 - x_1 y_2 - x_2 y_1 + 2x_2 y_2$$


$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\langle (x_1, x_2), (y_1, y_2) \rangle = x_1 y_1 - x_2 y_1 + 2x_2 y_2$$


$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Kryterium Sylwestera

$$\det (1) - 1 > 0$$

$$\det \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = 2 \cdot 1 - (-1) \cdot (-1) = 2 - 1 = 1 > 0$$

$$\begin{pmatrix} \underline{1} & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Przestrzeń i baza prostopadła

Definicja (przestrzeń prostopadła)

Niech V będzie przestrzenią liniową. Wtedy *przestrzenią prostopadłą* do V nazwiemy przestrzeń składającą się z wektorów prostopadłych do wektorów przestrzeni V .

Podejście praktyczne

W praktyce wystarczy sprawdzić prostopadłość do wektorów bazowych.

Definicja (baza prostopadła)

Bazą prostopadłą przestrzeni V nazywamy układ wektorów stanowiący bazę przestrzeni V , w którym każde dwa wektory są do siebie prostopadłe.

Jak znaleźć bazę prostopadłą?

$$v_1 = (0, 1, 1, 0)$$

$$\langle v_1, v_2 \rangle = x_2 + x_3$$

$$v_2: \begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 - 4x_4 = 0 \\ x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

$$v_2 = (2, 0, 0, 1)$$

$$V: 2x_1 - x_2 + x_3 - 4x_4 = 0$$

$$v_3: \begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 - 4x_4 = 0 \\ x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 + x_4 = 0 \end{cases}$$

$$v_3 = (1, 5, -5, -2)$$

Ortogonalizacja Grama-Schmidta

$$V = \text{span} \left((0, 1, 1, 0), (1, 2, 0, 0), (2, 0, 0, 1) \right)$$

$$y_1 = (0, 1, 1, 0)$$

Ortogonalizacja Grama-Schmidta

Oznaczmy bazę przestrzeni V jako $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$. Wtedy układ $(y_1, y_2, \dots, y_n)$, gdzie $y_1 = x_1$, a dla $i \in \{2, 3, \dots, n\}$:

$$y_i = x_i - \frac{\langle x_i, y_1 \rangle}{\langle y_1, y_1 \rangle} y_1 - \frac{\langle x_i, y_2 \rangle}{\langle y_2, y_2 \rangle} y_2 - \dots - \frac{\langle x_i, y_{i-1} \rangle}{\langle y_{i-1}, y_{i-1} \rangle} y_{i-1}$$

jest bazą prostopadłą przestrzeni V .

$$y_2 = (1, 2, 0, 0) - \frac{\langle (1, 2, 0, 0), (0, 1, 1, 0) \rangle}{\langle (0, 1, 1, 0), (0, 1, 1, 0) \rangle} \cdot (0, 1, 1, 0) = (1, 2, 0, 0) - \frac{2}{2} (0, 1, 1, 0) = (1, 1, -1, 0)$$

$$y_3 = (2, 0, 0, 1) - \frac{\langle (2, 0, 0, 1), (0, 1, 1, 0) \rangle}{\langle (0, 1, 1, 0), (0, 1, 1, 0) \rangle} \cdot (0, 1, 1, 0) - \frac{\langle (2, 0, 0, 1), (1, 1, -1, 0) \rangle}{\langle (1, 1, -1, 0), (1, 1, -1, 0) \rangle} \cdot (1, 1, -1, 0) = (2, 0, 0, 1) - (0, 1, 1, 0) - (1, 1, -1, 0) = \left(\frac{4}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, 1 \right)$$

Macierz Grama

$$\mathbf{x}_1 = (1, 2, 0) \quad \mathbf{x}_2 = (3, -1, 4)$$

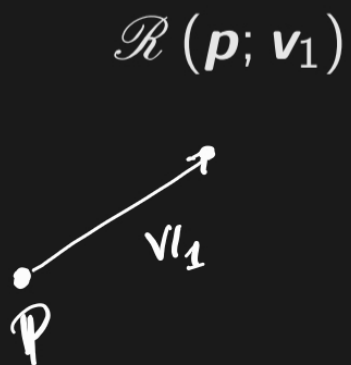
$$G(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 26 \end{pmatrix}$$

Definicja (macierz Grama)

Macierzą Grama dla układu wektorów $(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n)$ z pewnym iloczynem skalarnym $\langle \cdot, \cdot \rangle$ nazywamy macierz:

$$G(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n) = \begin{pmatrix} \langle \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_1 \rangle & \langle \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \rangle & \cdots & \langle \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_n \rangle \\ \langle \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_1 \rangle & \langle \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_2 \rangle & \cdots & \langle \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_n \rangle \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle \mathbf{x}_n, \mathbf{x}_1 \rangle & \langle \mathbf{x}_n, \mathbf{x}_2 \rangle & \cdots & \langle \mathbf{x}_n, \mathbf{x}_n \rangle \end{pmatrix}.$$

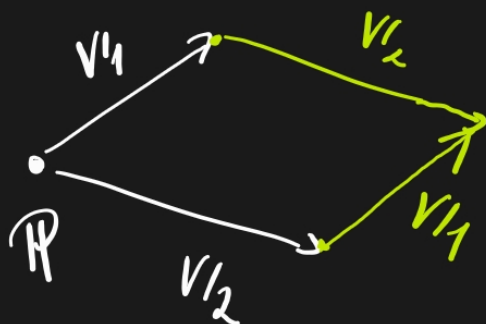
Równoległość i sympleks



Równoległość i sympleks

$$\mathcal{R}(p; v_1)$$

$$\mathcal{R}(p; v_1, v_2)$$

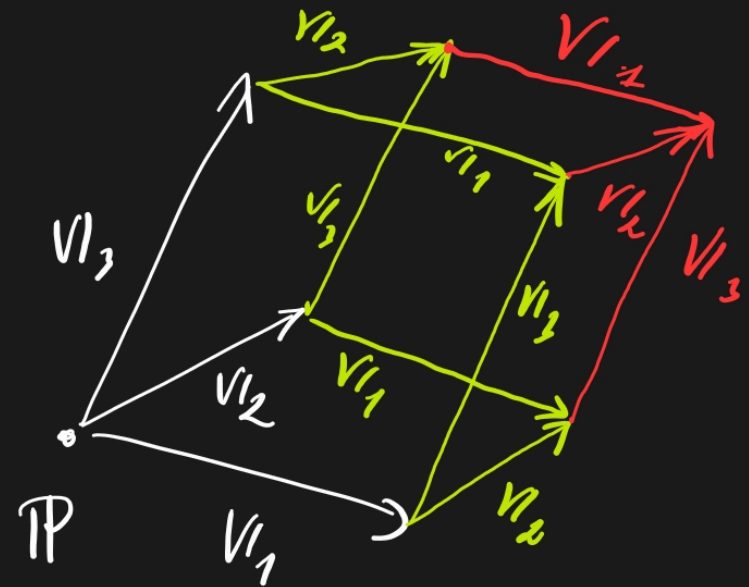


Równoległoscian i sympleks

$$\mathcal{R}(p; v_1)$$

$$\mathcal{R}(p; v_1, v_2)$$

$$\mathcal{R}(p; v_1, v_2, v_3)$$

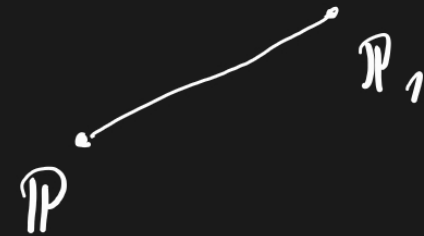


Równoległość i sympleks

$$\mathcal{R}(p; v_1)$$

$$\mathcal{S}(p, p_1)$$

$$\mathcal{R}(p; v_1, v_2)$$



$$\mathcal{R}(p; v_1, v_2, v_3)$$

Równoległoscian i sympleks

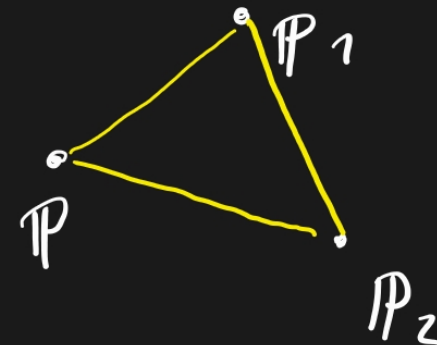
$$\mathcal{R}(p; v_1)$$

$$\mathcal{S}(p, p_1)$$

$$\mathcal{R}(p; v_1, v_2)$$

$$\mathcal{S}(p, p_1, p_2)$$

$$\mathcal{R}(p; v_1, v_2, v_3)$$



Równoległoscian i sympleks

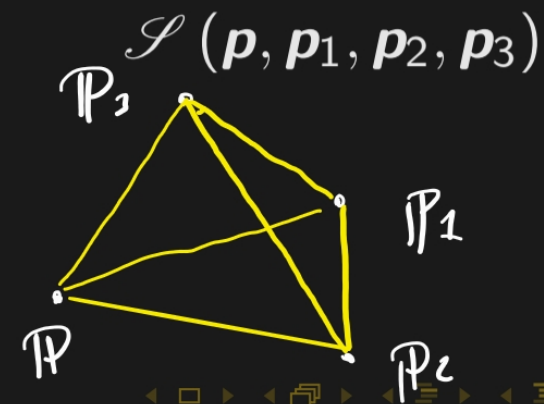
$$\mathcal{R}(p; v_1)$$

$$\mathcal{S}(p, p_1)$$

$$\mathcal{R}(p; v_1, v_2)$$

$$\mathcal{S}(p, p_1, p_2)$$

$$\mathcal{R}(p; v_1, v_2, v_3)$$



Miara równoległościanu i sympleksu

Dany jest punkt $\mathbf{p}$ oraz układ wektorów $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n)$ i układ punktów $(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \dots, \mathbf{p}_n)$ taki, że $\mathbf{p}_i = \mathbf{p} + \mathbf{v}_i$ dla $i \in \{1, 2, \dots, n\}$. Wtedy:

$$\mu_n(\mathcal{R}(\mathbf{p}; \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n)) = \sqrt{\det(G(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n))},$$

$$\mu_n(\mathcal{S}(\mathbf{p}, \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \dots, \mathbf{p}_n)) = \frac{1}{n!} \sqrt{\det(G(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n))}.$$

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \dots \cdot n$$

$$0! = 1$$

Miara równoległościanu i sympleksu

Dany jest punkt $\mathbf{p}$ oraz układ wektorów $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n)$ i układ punktów $(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \dots, \mathbf{p}_n)$ taki, że $\mathbf{p}_i = \mathbf{p} + \mathbf{v}_i$ dla $i \in \{1, 2, \dots, n\}$. Wtedy:

$$\mu_n(\mathcal{R}(\mathbf{p}; \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n)) = \sqrt{\det(G(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n))},$$

$$\mu_n(\mathcal{S}(\mathbf{p}, \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \dots, \mathbf{p}_n)) = \frac{1}{n!} \sqrt{\det(G(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n))}.$$

$$\begin{array}{cccc} \mathbf{p}_1 = (2, 2, 5) & \mathbf{p}_2 = (3, 1, 6) & \mathbf{p}_3 = (1, 3, 4) \\ \mathbf{p} = (1, 2, 3) & \mathbf{v}_1 = (1, 0, 2) & \mathbf{v}_2 = (2, -1, 3) & \mathbf{v}_3 = (0, 1, -2) \end{array}$$

Miara $\mu_3(\mathcal{R}(p, v_1, v_2, v_3)) = 3$

$$\mu_3(\mathcal{S}(p, p_1, p_2, p_3)) = \frac{1}{3!} \cdot 3 = \frac{1}{2}$$

Miara równoległościanu i sympleksu

Dany jest punkt p oraz układ wektorów $(v_1, v_2, \dots, v_n)$ i układ punktów $(p_1, p_2, \dots, p_n)$ taki, że $p_i = p + v_i$ dla $i \in \{1, 2, \dots, n\}$. Wtedy:

$$\mu_n(\mathcal{R}(p; v_1, v_2, \dots, v_n)) = \sqrt{\det(G(v_1, v_2, \dots, v_n))},$$

$$\mu_n(\mathcal{S}(p, p_1, p_2, \dots, p_n)) = \frac{1}{n!} \sqrt{\det(G(v_1, v_2, \dots, v_n))}.$$

$$p = (1, 2, 3) \quad v_1 = (1, 0, 2) \quad v_2 = (2, -1, 3) \quad v_3 = (0, 1, -2)$$

$$\begin{vmatrix} 5 & 8 & -4 \\ 8 & 14 & -7 \\ -4 & -7 & 5 \end{vmatrix} = 5 \cdot 14 \cdot 5 + 8 \cdot (-7) \cdot (-4) + (-4) \cdot 8 \cdot (-7) - (-4) \cdot 14 \cdot (-4) - (-7) \cdot (-7) \cdot 5 - 5 \cdot 8 \cdot 8 = 9$$