

Co to jest układ równań?

Matematyka dla ciekawych świata XVII

Daniel Laskowski

2 marca 2026

Przypomnienie ze szkoły

$$\begin{cases} 2x - y = 1 \\ x - y = 3 \end{cases}$$

Przypomnienie ze szkoły

$$\begin{cases} 2x - y = 1 \\ x - y = 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x - y = 1 \\ x = 3 + y \end{cases}$$

Przypomnienie ze szkoły

$$\begin{cases} 2x - y = 1 \\ x - y = 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x - y = 1 \\ x = 3 + y \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2(3 + y) - y = 1 \\ x = 3 + y \end{cases}$$

$$6 + y = 1$$

$$y = -5$$

Przypomnienie ze szkoły

$$\begin{cases} 2x - y = 1 \\ x - y = 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x - y = 1 \\ x = 3 + y \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2(3 + y) - y = 1 \\ x = 3 + y \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = -5 \\ x = -2 \end{cases}$$

Przypomnienie ze szkoły

$$\begin{cases} 2x \\ x \end{cases} \begin{cases} - y \\ - y \end{cases} = \begin{cases} 1 \\ 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x - y = 1 \\ x = 3 + y \end{cases}$$

$$- \begin{cases} 2x - y = 1 \\ x - y = 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2(3 + y) - y = 1 \\ x = 3 + y \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = -5 \\ x = -2 \end{cases}$$

Przypomnienie ze szkoły

$$\begin{cases} 2x - y = 1 \\ x - y = 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x - y = 1 \\ x = 3 + y \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2(3 + y) - y = 1 \\ x = 3 + y \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = -5 \\ x = -2 \end{cases}$$

$$-\begin{cases} 2x - y = 1 \\ x - y = 3 \end{cases}$$

$$x = -2$$

$$\begin{aligned} -2 - y &= 3 \\ -y &= 5 \\ y &= -5 \end{aligned}$$

Przypomnienie ze szkoły

$$\begin{cases} 2x - y = 1 \\ x - y = 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x - y = 1 \\ x = 3 + y \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2(3 + y) - y = 1 \\ x = 3 + y \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = -5 \\ x = -2 \end{cases}$$

$$-\begin{cases} 2x - y = 1 \\ x - y = 3 \end{cases}$$

$$x = -2$$

$$\begin{cases} x = -2 \\ -2 - y = 3 \end{cases}$$

Przypomnienie ze szkoły

$$\begin{cases} 2x - y = 1 \\ x - y = 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x - y = 1 \\ x = 3 + y \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2(3 + y) - y = 1 \\ x = 3 + y \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = -5 \\ x = -2 \end{cases}$$

$$-\begin{cases} 2x - y = 1 \\ x - y = 3 \end{cases}$$

$$x = -2$$

$$\begin{cases} x = -2 \\ -2 - y = 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = -2 \\ y = -5 \end{cases}$$

Szczególne przypadki

Definicja (układ oznaczony):

Układ równań nazwiemy *układem oznaczonym* gdy ma skończenie wiele rozwiązań.

Szczególne przypadki

Definicja (układ oznaczony):

Układ równań nazwiemy *układem oznaczonym* gdy ma skończenie wiele rozwiązań.

Definicja (układ nieoznaczony):

Układ równań nazwiemy *układem nieoznaczonym* gdy ma nieskończenie wiele rozwiązań.

Szczególne przypadki

Definicja (układ oznaczony):

Układ równań nazwiemy *układem oznaczonym* gdy ma skończenie wiele rozwiązań.

Definicja (układ nieoznaczony):

Układ równań nazwiemy *układem nieoznaczonym* gdy ma nieskończenie wiele rozwiązań.

Definicja (układ sprzeczny):

Układ równań nazwiemy *układem sprzecznym* gdy nie ma rozwiązania.

A co gdy niewiadomych jest więcej?

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 0 \\ 7x_1 + 14x_2 + 20x_3 + 27x_4 = 0 \\ 5x_1 + 10x_2 + 16x_3 + 19x_4 = -2 \\ 3x_1 + 5x_2 + 6x_3 + 13x_4 = 5 \end{cases}$$

A co gdy niewiadomych jest więcej?

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 0 \\ 7x_1 + 14x_2 + 20x_3 + 27x_4 = 0 \\ 5x_1 + 10x_2 + 16x_3 + 19x_4 = -2 \\ 3x_1 + 5x_2 + 6x_3 + 13x_4 = 5 \end{cases}$$

Sprawdźmy przykładowe czwórki.

$$(1, 1, 1, 1)$$

A co gdy niewiadomych jest więcej?

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 0 \\ 7x_1 + 14x_2 + 20x_3 + 27x_4 = 0 \\ 5x_1 + 10x_2 + 16x_3 + 19x_4 = -2 \\ 3x_1 + 5x_2 + 6x_3 + 13x_4 = 5 \end{cases}$$

Sprawdźmy przykładowe czwórki.

$$(1, 1, 1, 1)$$

$$\begin{cases} 1 + 2 + 3 + 4 \neq 0 \\ 7 + 14 + 20 + 27 \neq 0 \\ 5 + 10 + 16 + 19 \neq -2 \\ 3 + 5 + 6 + 13 \neq 5 \end{cases}$$

A co gdy niewiadomych jest więcej?

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 0 \\ 7x_1 + 14x_2 + 20x_3 + 27x_4 = 0 \\ 5x_1 + 10x_2 + 16x_3 + 19x_4 = -2 \\ 3x_1 + 5x_2 + 6x_3 + 13x_4 = 5 \end{cases}$$

Sprawdźmy przykładowe czwórki.

$$(1, 1, 1, 1)$$

$$(1, -1, -1, 1)$$

$$\begin{cases} 1 + 2 + 3 + 4 \neq 0 \\ 7 + 14 + 20 + 27 \neq 0 \\ 5 + 10 + 16 + 19 \neq -2 \\ 3 + 5 + 6 + 13 \neq 5 \end{cases}$$

A co gdy niewiadomych jest więcej?

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 0 \\ 7x_1 + 14x_2 + 20x_3 + 27x_4 = 0 \\ 5x_1 + 10x_2 + 16x_3 + 19x_4 = -2 \\ 3x_1 + 5x_2 + 6x_3 + 13x_4 = 5 \end{cases}$$

Sprawdźmy przykładowe czwórki.

$$(1, 1, 1, 1)$$

$$\begin{cases} 1 + 2 + 3 + 4 \neq 0 \\ 7 + 14 + 20 + 27 \neq 0 \\ 5 + 10 + 16 + 19 \neq -2 \\ 3 + 5 + 6 + 13 \neq 5 \end{cases}$$

$$(1, -1, -1, 1)$$

$$\begin{cases} 1 - 2 - 3 + 4 = 0 \\ 7 - 14 - 20 + 27 = 0 \\ 5 - 10 - 16 + 19 = -2 \\ 3 - 5 - 6 + 13 = 5 \end{cases}$$

Macierze

Definicja (macierz):

Macierzą $m \times n$ (o m wierszach i n kolumnach) o wyrazach ze zbioru S nazywamy tablicę:

$$\begin{pmatrix} x_{1,1} & x_{1,2} & \cdots & x_{1,n} \\ x_{2,1} & x_{2,2} & \cdots & x_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{m,1} & x_{m,2} & \cdots & x_{m,n} \end{pmatrix},$$

gdzie $x_{i,j} \in S$ dla $1 \leq i \leq m$ i $1 \leq j \leq n$.

Macierze

Definicja (macierz):

Macierzą $m \times n$ (o m wierszach i n kolumnach) o wyrazach ze zbioru S nazywamy tablicę:

$$\begin{pmatrix} x_{1,1} & x_{1,2} & \cdots & x_{1,n} \\ x_{2,1} & x_{2,2} & \cdots & x_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{m,1} & x_{m,2} & \cdots & x_{m,n} \end{pmatrix},$$

gdzie $x_{i,j} \in S$ dla $1 \leq i \leq m$ i $1 \leq j \leq n$.

Przykładowo:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -1 & 0 & 7 \\ 0 & -5 & 2 \end{pmatrix}$$

Macierze

Definicja (macierz):

Macierzą $m \times n$ (o m wierszach i n kolumnach) o wyrazach ze zbioru S nazywamy tablicę:

$$\begin{pmatrix} x_{1,1} & x_{1,2} & \cdots & x_{1,n} \\ x_{2,1} & x_{2,2} & \cdots & x_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{m,1} & x_{m,2} & \cdots & x_{m,n} \end{pmatrix},$$

gdzie $x_{i,j} \in S$ dla $1 \leq i \leq m$ i $1 \leq j \leq n$.

Przykładowo:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -1 & 0 & 7 \\ 0 & -5 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 & 3 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Macierze

Definicja (macierz):

Macierzą $m \times n$ (o m wierszach i n kolumnach) o wyrazach ze zbioru S nazywamy tablicę:

$$\begin{pmatrix} x_{1,1} & x_{1,2} & \cdots & x_{1,n} \\ x_{2,1} & x_{2,2} & \cdots & x_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{m,1} & x_{m,2} & \cdots & x_{m,n} \end{pmatrix},$$

gdzie $x_{i,j} \in S$ dla $1 \leq i \leq m$ i $1 \leq j \leq n$.

Przykładowo:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -1 & 0 & 7 \\ 0 & -5 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 & 3 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Macierz w postaci schodkowej

Definicja (macierz w postaci schodkowej):

Powiemy, że macierz jest *w postaci schodkowej*, gdy:

- 1° wiersze składające się z samych zer znajdują się poniżej wierszy zawierających inne liczby,
- 2° pierwszy niezerowy wyraz w danym wierszu znajduje się „bardziej na prawo” niż w wierszu poprzednim.

Macierz w postaci schodkowej (przykłady)

To jest macierz w postaci schodkowej:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Macierz w postaci schodkowej (przykłady)

To jest macierz w postaci schodkowej:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

To nie jest macierz w postaci schodkowej:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \\ 7 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Macierz w postaci schodkowej zredukowanej

Definicja (macierz w postaci schodkowej zredukowanej):

Powiemy, że macierz jest *w postaci schodkowej zredukowanej*, gdy jest w postaci schodkowej oraz:

- 1° pierwszy niezerowy wyraz w każdym wierszu wynosi 1,
- 2° wyraz z punktu 1° jest jedynym niezerowym wyrazem w swojej kolumnie.

Macierz w postaci schodkowej zredukowanej (przykłady)

To jest macierz w postaci schodkowej, ale nie jest w postaci zredukowanej:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Macierz w postaci schodkowej zredukowanej (przykłady)

To jest macierz w postaci schodkowej, ale nie jest w postaci zredukowanej:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

To jest macierz w postaci schodkowej zredukowanej:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Jak zeszkodkować macierz?

Aby sprowadzić macierz do postaci schodkowej (zredukowanej), można wykonywać następujące operacje:

- 1) zamiana wierszy miejscami,

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{W_1 \leftrightarrow W_2} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Jak zeszkodkować macierz?

Aby sprowadzić macierz do postaci schodkowej (zredukowanej), można wykonywać następujące operacje:

- 1) zamiana wierszy miejscami,
- 2) mnożenie wiersza przez stałą,

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{W_2: 2} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Jak zeszkodkować macierz?

Aby sprowadzić macierz do postaci schodkowej (zredukowanej), można wykonywać następujące operacje:

- 1) zamiana wierszy miejscami,
- 2) mnożenie wiersza przez stałą,
- 3) odejmowanie wierszy.

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 1/2 \end{pmatrix} \xrightarrow{w_1 - 3 \cdot w_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 1/2 \end{pmatrix}$$

Metoda eliminacji Gaussa

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 0 \\ 7x_1 + 14x_2 + 20x_3 + 27x_4 = 0 \\ 5x_1 + 10x_2 + 16x_3 + 19x_4 = -2 \\ 3x_1 + 5x_2 + 6x_3 + 13x_4 = 5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = -1 \\ x_3 = 1 \\ x_4 = 1 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 0 \\ 7 & 14 & 20 & 27 & 0 \\ 5 & 10 & 16 & 19 & -2 \\ 3 & 5 & 6 & 13 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{W_2 - 7W_1 \\ W_3 - 5W_1 \\ W_4 - 3W_1}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & -1 & -3 & 1 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{W_2 \leftrightarrow W_4 \\ W_4 \cdot (-1)}} \\ & \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -1 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{W_4 + W_3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -1 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{W_4 : (-2)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -1 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{W_1 - 2W_2} \\ & \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & 6 & 10 \\ 0 & 1 & 3 & -1 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{W_1 + 3W_3 \\ W_2 - 3W_3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{W_1 - 3W_4 \\ W_2 - 2W_4 \\ W_3 + W_4}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Szczególne przypadki

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 + x_3 = 4 \\ -x_1 + 2x_2 - 5x_3 = 3 \\ 5x_1 - 13x_2 + 13x_3 = 8 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 & 4 \\ -1 & 2 & -5 & 3 \\ 5 & -13 & 13 & 8 \end{pmatrix} \xrightarrow[\omega_3 - 5\omega_1]{\omega_2 + \omega_1} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & -4 & 7 \\ 0 & 2 & 8 & -12 \end{pmatrix} \xrightarrow{\omega_3 + 2\omega_2}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & -4 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$0x_1 + 0x_2 + 0x_3 = 2$$
$$0 = 2$$

Szczególne przypadki

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 + x_3 = 4 \\ -x_2 + 2x_2 - 5x_3 = 3 \\ 5x_1 - 13x_2 + 13x_3 = 8 \end{cases}$$

Układ sprzeczny a macierz

Gdy po sprowadzeniu macierzy do postaci schodkowej pozostaje wiersz postaci $0 \ 0 \ \dots \ 0 \ c$, gdzie $c \neq 0$, to układ jest sprzeczny.

Szczególne przypadki

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 = 0 \\ 2x_1 + x_3 = 1 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{W_2 - 2W_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 5 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{W_2: (-1/2)}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -5/2 & -1/2 \end{pmatrix} \xrightarrow{W_1 - W_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1 & -5/2 & -1/2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x_1 + \frac{1}{2}x_3 = \frac{1}{2} \\ x_2 - \frac{5}{2}x_3 = -\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}x_3 \\ x_2 = -\frac{1}{2} + \frac{5}{2}x_3 \end{cases}$$

Szczególne przypadki

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 = 0 \\ 2x_2 + x_3 = 1 \end{cases}$$

Układ nieoznaczony a macierz

Gdy po sprowadzeniu macierzy do postaci schodkowej zredukowanej pozostaje mniej wierszy niż niewiadomych układ jest nieoznaczony.