

Matematyka dla Ciekawych Świata XVII — lista 9

Iloczyn skalarny i prostopadłość

spisał Daniel Laskowski na podstawie różnych źródeł
(głównie skryptu T. Koźniewskiego)

18 maja 2026

1 Powtórzenie z wykładu

Dawno, dawno temu... na wykładzie pojawiło się pojęcie iloczynu skalarnego, czyli operacji zdefiniowanej jako:

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) \circ (y_1, y_2, \dots, y_n) = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n.$$

W rzeczywistości jest to tzw. standardowy iloczyn skalarny, a samych iloczynów jest więcej. Nazywamy nimi funkcję $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$, gdzie V jest przestrzenią liniową, która jest liniowa względem obu zmiennych, symetryczna i dodatnio określona. Różne iloczyny skalarne pozwalają określić alternatywne definicje prostopadłości, a dodatkowo określają one normę wektora wzorem: $\|\mathbf{x}\| = \sqrt{\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle}$. Dodatkowo określiliśmy pojęcie przestrzeni prostopadłej do V , tj. takiej której wszystkie wektory są prostopadłe do wektorów z V . Taką przestrzeń oznaczyliśmy jako $V^\perp$.

2 Zadania

1. Niech $V = \text{span}((0, 1, 2, 1), (1, 3, 2, 2), (2, 1, -6, -1))$. Znajdź bazę $V^\perp$ (w $\mathbb{R}^4$) ze standardowym iloczynem skalarnym oraz z iloczynem zdefiniowanym wzorem:

$$\langle (x_1, x_2, x_3, x_4), (y_1, y_2, y_3, y_4) \rangle = x_1 y_1 - x_1 y_2 - x_2 y_1 + 4x_2 y_2 + 2x_3 y_3 - x_3 y_4 - x_4 y_3 + 2x_4 y_4.$$

2. Niech $V = \text{span}((1, 1, 2, 1), (2, 3, 1, 3), (3, 5, 0, 5))$ oraz $U : \begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 0 \\ -x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$.

Znajdź bazę prostopadłą przestrzeni V i bazę ortonormalną przestrzeni U z iloczynem skalarnym danym wzorem:

$$\langle (x_1, x_2, x_3, x_4), (y_1, y_2, y_3, y_4) \rangle = 2x_1 y_1 + x_1 y_4 + x_2 y_2 + 2x_3 y_3 + x_4 y_1 + 2x_4 y_4.$$

3. W $\mathbb{R}^4$ znajdź wzór na rzut prostopadły i symetrię na przestrzeń $H : x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = 5$.

4. W $\mathbb{R}^4$ znajdź wzór na rzut prostopadły i symetrię na przestrzeń $H = (0, 1, 1, 0) + \text{span}((2, 1, 0, 1), (1, 0, 0, 1))$.

5. Oblicz wyznacznik Grama wektorów $(1, 2, 1, 3), (3, 5, 1, 4), (5, 8, 1, 5)$ (ze standardowym iloczynem skalarnym).

6. Niech $\mathbf{p} := (1, 2, 3)$, $\mathbf{x}_1 = (1, 0, 1)$, $\mathbf{x}_2 = (0, 1, 3)$ i $\mathbf{x}_3 = (1, 3, -1)$ oraz $\mathbf{p}_i = \mathbf{p} + \mathbf{x}_i$, dla $i \in \{1, 2, 3\}$. Znajdź objętości i pola ścian bocznych $\mathcal{R}(\mathbf{p}; \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3)$ i $\mathcal{S}(\mathbf{p}, \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3)$.

3 Praca domowa

3.1 Zadanie za 1 punkt

7. Znajdź bazę prostopadłą przestrzeni $\mathbb{R}^3$ z iloczynem określonym wzorem:

$$\langle (x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3) \rangle = x_1 y_1 + 2x_1 y_2 + 2x_2 y_1 + 7x_2 y_2 + x_2 y_3 + x_3 y_2 + 10x_3 y_3.$$

3.2 Zadania za 2 punkty

8. Znajdź bazę prostopadłą przestrzeni V i bazę ortonormalną przestrzeni U z zadania drugiego, ze standardowym iloczynem skalarnym.

9. Czy wyrażenie:

$$\langle (x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3) \rangle = 2x_1y_1 + 2x_2y_1 + x_2y_2 + x_2y_3 + x_3y_2 + 2x_3y_3$$

jest iloczynem skalarnym?

10. Czy wyrażenie:

$$\langle (x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3) \rangle = 2x_1y_1 + 2x_2y_1 + 2x_1y_2 + x_2y_2 + x_2y_3 + x_3y_2 + 2x_3y_3$$

jest iloczynem skalarnym?

11. Niech $\mathbf{p} := (0, 1, 0)$, $\mathbf{x}_1 = (1, 1, 0)$, $\mathbf{x}_2 = (1, 0, 1)$ i $\mathbf{x}_3 = (1, 2, 1)$ oraz $\mathbf{p}_i = \mathbf{p} + \mathbf{x}_i$, dla $i \in \{1, 2, 3\}$. Znajdź objętości i pola ścian bocznych $\mathcal{R}(\mathbf{p}; \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3)$ i $\mathcal{S}(\mathbf{p}, \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3)$.

3.3 Zadania za 3 punkty

12. W $\mathbb{R}^4$ znajdź wzór na rzut prostopadły i symetrię na przestrzeń $H : x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 3$.

13. W $\mathbb{R}^4$ znajdź wzór na rzut prostopadły i symetrię na przestrzeń $\text{span}((2, 1, 0, 1), (1, 0, 0, 1))$.

14. Znajdź odległość punktu $(1, 2, 1, 0)$ od przestrzeni $H : x_1 + 2x_2 - x_3 + 4x_4 = 6$ (ze standardowym iloczynem skalarnym).