

Matematyka dla Ciekawych Świata XVII — lista 8

Wyznaczniki macierzy

spisał Daniel Laskowski na podstawie różnych źródeł
(głównie skryptu T. Koźniewskiego)

20 kwietnia 2026

1 Powtórzenie z wykładu

Jedną z metod obliczenia wyznacznika macierzy jest sprowadzenie jej do postaci trójkątnej i wymnożenie elementów na diagonalu. Należy uważać, że przy dokonywaniu operacji elementarnych wyznacznik się zmienia, tj.:

- po zamianie wierszy wyznacznik zmienia znak na przeciwny,
- po pomnożeniu wiersza przez skalar, jego odwrotność jest wyciągana przed wyznacznik,
- odejmowanie wierszy nie zmienia wyznacznika.

Pojawiło się również pojęcie macierzy odwrotnej, czyli takiej przez którą pomnożenie macierzy wyjściowej, da w efekcie macierz jednostkową. Aby taka macierz odwrotna istniała, pierwotna macierz musi być nieosobliwa, czyli mieć niezerowy wyznacznik.

2 Zadania

1. Oblicz wyznaczniki macierzy:

$$\text{a)} \begin{vmatrix} 401 & 451 \\ 80 & 90 \end{vmatrix} \quad \text{b)} \begin{vmatrix} 191 & 91 \\ 151 & 72 \end{vmatrix} \quad \text{c)} \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 4 & 0 & -1 \end{vmatrix} \quad \text{d)} \begin{vmatrix} 1 & 98 & 59 \\ 1 & 97 & 61 \\ 1 & 96 & 63 \end{vmatrix}$$

$$\text{e)} \begin{vmatrix} 4 & 3453 & 345 \\ 7 & 6786 & 678 \\ 1 & 9129 & 912 \end{vmatrix} \quad \text{f)} \begin{vmatrix} 3 & 4 & 2 & 2 \\ 4 & 5 & 6 & 5 \\ 2 & 3 & 6 & 0 \\ 8 & 7 & 7 & 8 \end{vmatrix} \quad \text{g)} \begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 2 \end{vmatrix}$$

2. Jaki jest związek między osobliwością macierzy, a liniową niezależnością wektorów tworzących jej wiersze?

3. Bez obliczania wyznacznika macierzy znajdź rozwiązanie równania:

$$\begin{vmatrix} 1+x & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 4 & 6-x & 4 & 4 \\ 6 & 6 & 6 & x \end{vmatrix} = 0$$

4. Bez obliczania wyznacznika pokaż, że jest on podzielny przez 10:

$$\text{a)} \begin{vmatrix} 2 & 4 & 7 \\ 8 & 6 & 3 \\ 2 & 1 & 5 \end{vmatrix} \quad \text{b)} \begin{vmatrix} 8 & 3 & 9 \\ 2 & 4 & 8 \\ 3 & 1 & 7 \end{vmatrix}$$

5. Wyznacz macierze odwrotne do:

a) $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 7 & 9 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 3 & 9 & 8 \\ 2 & 7 & 8 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$

3 Praca domowa

3.1 Zadanie za 1 punkt

6. Oblicz wyznacznik macierzy:

$$\begin{vmatrix} 1001 & 1002 & 1003 & 1004 \\ 1002 & 1003 & 1001 & 1002 \\ 1001 & 1001 & 1001 & 999 \\ 1001 & 1000 & 998 & 999 \end{vmatrix}$$

7. Wyznacz macierz odwrotną do:

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \\ 7 & 9 & 3 & 4 \\ 4 & 6 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

3.2 Zadania za 2 punkty

8. Bez obliczania wyznacznika znajdź rozwiązanie równania:

$$\begin{vmatrix} x^2 & 4 & 9 & 3 \\ -1 & 1-x^2 & -9 & -3 \\ 1 & 4 & 9 & 3 \\ 1 & 4 & x^2 & 3 \end{vmatrix} = 0$$

9. Macierze odwrotne przydają się do rozwiązywania układów równań. Przykładowo układ równań:

$$\begin{cases} 2x_1 & + & 3x_2 & = & 7 \\ x_1 & - & x_2 & = & 2 \end{cases}$$

można zapisać jako iloczyn macierzy $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}}_A \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}}_x = \underbrace{\begin{pmatrix} 7 \\ 2 \end{pmatrix}}_b.$$

Skoro więc $A^{-1} \cdot A = I$, to możemy domnożyć wyrażenie $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ z lewej strony przez A^{-1} . Otrzymamy wówczas rozwiązanie równania, bo $A^{-1}A\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b} \Leftrightarrow \mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b}$. Czyli skoro $A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{3}{5} \\ \frac{1}{5} & -\frac{2}{5} \end{pmatrix}$, to:

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{3}{5} \\ \frac{1}{5} & -\frac{2}{5} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{13}{5} \\ \frac{3}{5} \end{pmatrix},$$

zatem rozwiązaniem układu jest $\begin{cases} x_1 = \frac{13}{5} \\ x_2 = \frac{3}{5} \end{cases}$. Rozwiąż taką metodą układ równań:

$$\begin{cases} x_1 & + & 4x_2 & + & 2x_3 & = & 1 \\ 2x_1 & + & 3x_2 & + & 3x_3 & = & -1 \\ 4x_1 & + & x_2 & + & 4x_3 & = & 0 \end{cases}$$

3.3 Zadania za 3 punkty

10. Bez obliczania wyznacznika pokaż, że jest on podzielny przez 10:

$$\begin{vmatrix} 4 & 2 & 4 \\ 8 & 1 & 1 \\ 5 & 3 & 2 \end{vmatrix}$$

11. Dla jakich wartości parametru $t \in \mathbb{R}$ macierz:

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 & 3 \\ 1 & t & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

jest odwracalna? Znajdź te odwrotności dla wyznaczonych wartości.