

Matematyka dla Ciekawych Świata XVII — lista 7

Przekształcenia afiniczne

spisał Daniel Laskowski na podstawie różnych źródeł
(głównie skryptu T. Koźniewskiego)

20 kwietnia 2026

1 Powtórzenie z wykładu

Na wykładzie poznaliśmy pojęcie przekształcenia afinicznego. Nazwaliśmy nim funkcję $f : H \rightarrow G$, gdzie H i G są przestrzeniami afinicznymi, która dla dowolnych punktów $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \dots, \mathbf{p}_n \in H$ i zestawu wag $t_1, t_2, \dots, t_n$ spełnia własność:

$$f(t_1\mathbf{p}_1 + t_2\mathbf{p}_2 + \dots + t_n\mathbf{p}_n) = t_1f(\mathbf{p}_1) + t_2f(\mathbf{p}_2) + \dots + t_nf(\mathbf{p}_n).$$

Przekształcenie afiniczne możemy interpretować też jako przesunięte przekształcenie liniowe. Wtedy, jeśli $\varphi : T(H) \rightarrow T(G)$ i jeśli $\mathbf{p}_0 \in H$ oraz $f(\mathbf{p}_0) =: \mathbf{q}_0 \in G$, to dla dowolnego $\mathbf{p} \in H$:

$$f(\mathbf{p}) = \mathbf{q}_0 + \varphi(\overrightarrow{\mathbf{p}_0\mathbf{p}}).$$

Przekształcenie liniowe φ odpowiadające w ten sposób przekształceniu afinicznemu f nazywamy wówczas pochodną przekształcenia f i oznaczamy f' .

2 Zadania

1. Niech $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$ będzie przekształceniem afinicznym takim, że $f((1, 1, 1)) = (2, 0, 1, 0)$, $f((2, 1, 1)) = (0, 1, 3, 3)$, $f((1, 2, 1)) = (0, 0, 1, 3)$, $f((1, 1, 2)) = (0, 1, 0, 1)$. Znajdź wzór na przekształcenie f .

2. Niech $H \subseteq \mathbb{R}^3$ będzie płaszczyzną o równaniu $x_1 + 2x_2 - x_3 = 1$. Znajdź wzór przekształcenia afinicznego $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ takiego, że $f(H) = \{(1, 1, 4)\}$ oraz $f((1, 1, 1)) = (0, 0, 1)$.

3. Niech $f : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ będzie rzutem na $M : x_1 + x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 2$ wzdłuż prostej $L = (1, 1, 1, 0) + \text{span}((2, 0, 3, 0))$ i niech $g : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ będzie symetrią względem M wzdłuż L . Niech $H : \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 1 \\ 3x_1 + 4x_2 + x_3 + x_4 = 1 \end{cases}$. Znajdź:

- a) $f((2, 0, 1, 1))$ oraz $g((2, 0, 1, 1))$,
- b) parametryzację przestrzeni $f(H)$,
- c) układ równań opisujący przestrzeń $g^{-1}(H)$.

4. Niech $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ będzie jednokładnością o środku $(1, 1, 1)$ i skali 3, niech $g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ będzie przesunięciem o wektor $(3, 2, 1)$ i niech $h : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ będzie rzutem na $L = (0, 1, 0) + \text{span}((1, 1, 2))$ wzdłuż $H : x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 2$. Znaleźć wzory na przekształcenia:

- a) $f \circ g \circ h$, b) $g \circ h \circ h \circ f$, c) $h \circ f \circ f \circ g \circ g$.

3 Praca domowa

3.1 Zadanie za 1 punkt

5. Dane są punkty $\mathbf{p} = (-1, -2)$ i $\mathbf{q} = (3, 6)$. Wiadomo, że odcinek $\widetilde{\mathbf{p}\mathbf{q}}$ jest obrazem odcinka $\mathbf{pq}$ w jednokładności o dodatniej skali i środku $(-5, 2)$ i jednocześnie w jednokładności o ujemnej skali i środku $(3, 2)$. Znajdź współrzędne punktów $\widetilde{\mathbf{p}}$ i $\widetilde{\mathbf{q}}$ oraz skale obu jednokładności.

3.2 Zadania za 2 punkty

6. Znajdź wzór przekształcenia afinicznego $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ takiego, że $f((4, 5, 0)) = (2, 1, 10)$, $f((2, -1, 0)) = (0, 3, 2)$, $f((1, 0, 1)) = (0, 0, 1)$ i $f((0, 0, 1)) = (-1, -2, 0)$.

7. Niech $L = (0, 3, 1) + \text{span}((1, 1 - 1))$ oraz niech $H : \begin{cases} x_1 + 4x_2 - x_3 - x_4 = 2 \\ x_2 + 2x_3 + x_4 = 1 \end{cases}$.
Znajdź parametryzację przestrzeni $f(H)$ i układ bazowy przestrzeni $f^{-1}(L)$.

3.3 Zadania za 3 punkty

8. Dane są proste $L_1 : x_1 + 3x_2 = 6$ i $L_2 : -2x_1 + x_2 = 3$. Znajdź wzór rzutu wzdłuż prostej L_1 na prostą L_2 .

9. Niech $L : \begin{cases} -x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 - 2x_2 = -1 \end{cases}$ oraz $P : x_1 - x_3 = -6$. Znajdź wzór na symetrię względem P wzdłuż L .