

# Matematyka dla Ciekawych Świata XVII — lista 6

## Przestrzenie afiniczne

spisał Daniel Laskowski na podstawie różnych źródeł  
(głównie skryptu T. Koźniewskiego)

13 kwietnia 2026

### 1 Powtórzenie z wykładu

Na wykładzie poznaliśmy pojęcie przestrzeni afinicznej, jako przestrzeni liniowej przesuniętej do pewnego punktu. Stosowaliśmy wówczas oznaczenie  $\mathbf{p} + V$ , gdzie  $\mathbf{p}$  jest punktem, do którego przesunięta została przestrzeń  $V$ . Podobnie do przestrzeni liniowej, która była rozpinana przez wektory, nauczyliśmy się rozpinąć przestrzeń afiniczną – tym razem jednak w układzie rozpinającym znajdowały się punkty. Jeżeli więc mamy przestrzeń afiniczną  $H := \text{aff}(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \dots, \mathbf{p}_n)$ , to zawiera ona wszystkie kombinacje afiniczne punktów  $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \dots, \mathbf{p}_n$ . Oznacza to, że do  $H$  należy dowolny punkt  $\mathbf{q}$  postaci:

$$\mathbf{q} = t_1\mathbf{p}_1 + t_2\mathbf{p}_2 + \dots + t_n\mathbf{p}_n, \quad \text{gdzie } t_1 + t_2 + \dots + t_n = 1.$$

Kombinację afiniczną odróżnia więc od liniowej sumowanie się współczynników  $t_1, t_2, \dots, t_n$  do 1. Z tego powodu, nazywamy je wagami. Mając przestrzeń afiniczną  $H := \mathbf{p} + \text{span}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n)$  możemy łatwo odczytać jej układ rozpinający, jest nim zestaw punktów  $(\mathbf{p}, \mathbf{p} + \mathbf{v}_1, \mathbf{p} + \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{p} + \mathbf{v}_n)$ . Afinicznie niezależny zestaw punktów rozpinający przestrzeń nazywamy bazą punktową, a układ punktu i wektorów (w powyższym przykładzie układ  $(\mathbf{p}; \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n)$ ) – układem bazowym. Podobnie jak przestrzeń liniową  $V$ , przestrzeń afiniczną  $H := \mathbf{p} + V$  też da się opisać za pomocą układu równań. Aby to zrobić należy najpierw przestrzeń  $V$  opisać układem (nazywamy ją przestrzenią styczną do  $H$  i oznaczamy  $T(H)$ ). Następnie zamieniamy zera po znaku równości w układzie równań na takie liczby, aby punkt  $\mathbf{p}$  był rozwiązaniem układu równań. Przykładowo, weźmy przestrzeń  $H := (1, 2, -1, 3) + \text{span}((1, 2, -1, 0), (1, -1, 2, 3))$ . Wtedy przestrzeń  $T(H) = \text{span}((1, 2, -1, 0), (1, -1, 2, 3))$  i opisuje ją układ:

$$T(H) : \begin{cases} -x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ -2x_1 + x_2 + x_4 = 0 \end{cases}.$$

Podstawiając punkt  $\mathbf{p}$  otrzymujemy układ opisujący przestrzeń  $H$ , czyli:

$$H : \begin{cases} -x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ -2x_1 + x_2 + x_4 = 3 \end{cases}.$$

Pojawił się także nowy sposób opisu przestrzeni, czyli jej parametryzacja. Pozwala ona na zapisanie dowolnego punktu w przestrzeni  $H := \mathbf{p} + \text{span}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n)$ , jako sumy punktu  $\mathbf{p}$  i kombinacji liniowej wektorów  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n$ . Przykładowo parametryzacją przestrzeni  $H := (1, 2, -1, 3) + \text{span}((1, 2, -1, 0), (1, -1, 2, 3))$ , będzie zapis:

$$H = \{(1 + c_1 + c_2, 2 + 2c_1 - c_2, -1 - c_2 + 2c_2, 3 + 3c_2) : c_1, c_2 \in \mathbb{R}\}.$$

### 2 Zadania

1. Czy punkt  $(1, 2, 1) \in \mathbb{R}^3$  jest kombinacją afiniczną punktów  $(1, 0, 0)$ ,  $(0, 1, 0)$  i  $(0, 0, 1)$ ?
2. Sprawdź czy punkty  $(3, 7, 4)$ ,  $(1, 9, 7)$  i  $(5, 5, 1)$  są afinicznie zależne.

3. Znajdź układy równań opisujące:

- a)  $\text{aff}((1, 0, 1, 1), (2, 5, 3, 0), (2, 2, 1, 1), (0, 1, 2, 3))$ ,
- b)  $(2, 1, 3, 3) + \text{span}((4, 1, 1, 2), (3, 4, 3, 1), (2, 7, 5, 0))$ ,
- c) prostą przechodzącą przez punkty  $(3, 3, 4)$  i  $(1, 2, 3)$ .

4. Podaj parametryzację przestrzeni z poprzedniego zadania.

5. Znajdź bazę punktową oraz parametryzację przestrzeni opisanej równaniem:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 2 \\ 2x_1 + 3x_2 - 2x_3 + x_4 = 3 \end{cases}.$$

6. Znajdź przestrzeń równoległą (opisz ją jako układ równań, układ rozpinający oraz parametryzację) do przestrzeni z poprzedniego zadania, przechodzącą przez punkt  $(3, 1, 2, 1)$ .

7. Dane są punkty  $\mathbf{p} := (-2, 4, 5, 1)$ ,  $\mathbf{q} := (0, 2, -3, 2)$  i proste  $L_1 := (1, 1, -2, 1) + \text{span}(-1, -1, 1, 2)$ ,

$L_2 : \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 + 3x_4 = 11 \\ -x_1 + x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 3 \\ 2x_1 - 4x_2 + 3x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$ . Znajdź (zapisując układem równań lub parametryzacją):

- a) płaszczyznę zawierającą punkt  $\mathbf{p}$  i prostą  $L_1$ ,
- b) płaszczyznę zawierającą punkty  $\mathbf{p}$ ,  $\mathbf{q}$  i równoległą do  $L_1$ ,
- c) podprzestrzeń zawierającą naraz proste  $L_1$  i  $L_2$ ,
- d) podprzestrzeń zawierającą naraz punkty  $\mathbf{p}$ ,  $\mathbf{q}$  i prostą  $L_1$ .

8. Sprawdź czy podane podprzestrzenie mają punkt wspólny:

a)  $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 3 \\ 3x_1 + x_2 - 5x_3 = 0 \end{cases}$  i  $\begin{cases} 4x_1 + x_2 + x_3 = 3 \\ x_1 + 3x_2 - 13x_3 = 3 \end{cases}$ ,

b)  $(-1, 0, 1, 0) + c_1(2, 3, 5, 2) + c_2(1, -2, 1, -1)$  i  $(0, 2, 0, 4) + c_1(1, 2, -1, 1) + c_2(1, -3, 2, -3)$ ,

c)  $(0, 0, 3) + c(1, 1, -3)$  i  $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 3 \\ 4x_1 - x_2 - 13x_3 = 3 \end{cases}$ .

### 3 Praca domowa

#### 3.1 Zadanie za 1 punkt

9. Pokaż, że punkty  $(1, 3, 1)$ ,  $(4, -1, 3)$  i  $(4, 4, 4)$  są afinicznie niezależne.

10. Pokaż, że punkty  $(1, 2, 1)$ ,  $(1, -1, 1)$ ,  $(0, 1, 3)$  i  $(5, -3, -13)$  są afinicznie zależne.

#### 3.2 Zadania za 2 punkty

11. Znajdź układ równań opisujący płaszczyznę przechodzącą przez punkty  $(3, 0, 1)$ ,  $(2, 1, 0)$  i  $(1, 1, 1)$ .

12. Podaj parametryzację płaszczyzny z poprzedniego zadania.

#### 3.3 Zadania za 3 punkty

13. Znajdź parametryzację prostej  $L$  (w  $\mathbb{R}^3$ ) opisanej układem równań:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ 2x_2 - x_3 = -1 \end{cases}.$$

Znajdź równanie płaszczyzny, która zawiera prostą  $(2, 2, 2) + \text{span}(2, 3, 2)$  i jest równoległą do prostej  $L$ .

14. Dla punktów i prostych z zadania 7. znajdź: (zapisując układem równań lub parametryzacją):

- a) płaszczyznę zawierającą punkt  $\mathbf{1}$  i prostą  $L_2$ ,
- b) płaszczyznę zawierającą punkty  $\mathbf{p}$ ,  $\mathbf{q}$  i równoległą do  $L_2$ ,
- c) podprzestrzeń zawierającą naraz punkty  $\mathbf{p}$ ,  $\mathbf{q}$  i prostą  $L_2$ .

**15.** Znajdź płaszczyznę przechodzącą przez punkt  $(1, -1, 2, -3)$  i równoległą do prostych  $(1, 1, 1, 1) + c(2, 0, -1, 1)$  i

$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 - 5x_3 + 7x_4 = -2 \\ 2x_1 - 3x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 5 \\ 4x_1 + 11x_2 - 3x_3 + 16x_4 = 1 \end{cases}.$$