

Matematyka dla Ciekawych Świata XVII — lista 5

Mnożenie macierzy

spisał Daniel Laskowski na podstawie różnych źródeł
(głównie skryptu T. Koźniewskiego)

30 marca 2026

1 Powtórzenie z wykładu

Na wykładzie dowiedzieliśmy się jak mnożyć macierze. Aby wykonać tę operację, należy zadbać o odpowiednie wymiary macierzy, tj. gdy chcemy wykonać mnożenie AB , to liczba wierszy macierzy A musi być taka jak liczba kolumn macierzy B (oznaczymy tę liczbę jako k). Wynikiem takiego mnożenia będzie wówczas macierz C , w której wyraz $c_{i,j}$ (czyli w i -tym wierszu i j -tej kolumnie) będzie wyrażał się wzorem:

$$c_{i,j} = a_{i,1}b_{1,j} + a_{i,2}b_{2,j} + \dots + a_{i,k}b_{k,j}.$$

Dowiedzieliśmy się również, że przemnożenie przez siebie macierzy przekształceń daje nam macierz przekształcenia będącego złożeniem tychże przekształceń. To znaczy, jeśli mamy dwa przekształcenia liniowe $\varphi : V \rightarrow W$ i $\psi : W \rightarrow Z$, a układy $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ i $\mathcal{C}$ są odpowiednio bazami przestrzeni V , W i Z to:

$$M(\psi \circ \varphi)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{C}} = M(\psi)_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} \cdot M(\varphi)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}}.$$

2 Zadania

1. Pomnóż macierze:

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}.$$

2. Pomnóż macierz $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$ przez macierze $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ oraz $\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$. Co zauważasz?

3. Czy operacje elementarne da się zapisać za pomocą macierzy?

4. Podaj przykład macierzy A i B , dla których $AB \neq BA$.

5. Niech $\varphi : V \rightarrow W$ i $\psi : W \rightarrow Z$ będą przekształceniami liniowymi, o których wiadomo, że:

$$M(\varphi)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 & 5 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad M(\psi)_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

a układy $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ i $\mathcal{C}$ są odpowiednio pewnymi bazami przestrzeni V , W i Z . Wiemy, że wektor $\mathbf{x}$ ma w bazie $\mathcal{A}$ współrzędne $1, -1, 3, -2$. Znaleźć współrzędne wektora $\varphi(\mathbf{x})$ w bazie $\mathcal{B}$ oraz współrzędne wektora $(\psi \circ \varphi)(\mathbf{x})$ w bazie $\mathcal{C}$.

3 Praca domowa

3.1 Zadanie za 1 punkt

6. Wykonaj mnożenie macierzy:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 \\ -1 & 4 & -2 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

3.2 Zadania za 2 punkty

7. Niech $\mathcal{A} := ((1, 2, 0), (3, 5, 0), (6, 4, 1))$, $\mathcal{B} := ((1, 0, 1, 0), (0, 1, 1, 1), (0, 1, 1, 0), (1, 1, 1, 1))$, $\mathcal{C} := ((5, 4), (4, 3))$ oraz niech $\varphi: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$ i $\psi: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^2$ będą przekształceniami liniowymi takimi, że:

$$\varphi((x_1, x_2, x_3)) = (3x_1 - x_2 - 2x_3, 3x_1 + 4x_2 + x_3, 5x_1 + 2x_3, x_1 + x_2 + x_3)$$

$$M(\psi)_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 5 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Znajdź macierz $M(\psi \circ \varphi)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{C}}$, macierz $M(\psi \circ \varphi)_{\mathcal{B}}^{\text{st}}$ oraz $\psi \circ \varphi$.

8. Niech $\mathcal{A} := ((5, 7, 1), (4, 0, 0), (6, 2, 5))$ i $\mathcal{B} := ((1, -1, 1), (0, 1, 6), (0, 1, 5))$. Znajdź macierz $C \in M_{3,3}(\mathbb{R})$ taką, że dla dowolnego wektora $\mathbf{x}$ zachodzi: jeśli a_1, a_2, a_3 to współrzędne $\mathbf{x}$ w bazie $\mathcal{A}$, a b_1, b_2, b_3 to współrzędne $\mathbf{x}$ w bazie $\mathcal{B}$, to:

$$C \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}.$$

Wskazówka: Znajdź współrzędne kolejnych wektorów bazy $\mathcal{A}$ w bazie $\mathcal{B}$ i to zada Ci przekształcenie zmieniające bazę.

3.3 Zadania za 3 punkty

9. Jak będzie wyglądała n -ta potęga macierzy $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$?

10. Przedstaw macierz $\begin{pmatrix} 3 & 7 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 5 & 0 & 6 \\ 3 & 8 & 7 & 7 \end{pmatrix}$ jako iloczyn macierzy operacji elementarnych.

Wskazówka: Sprowadź macierz do postaci schodkowej zredukowanej, a następnie przeanalizuj „od końca” wykonywane przez Ciebie operacje.