

Matematyka dla Ciekawych Świata XVII — lista 4

Przekształcenia liniowe

spisał Daniel Laskowski na podstawie różnych źródeł
(głównie skryptu T. Koźniewskiego)

23 marca 2026

1 Powtórzenie z wykładu

Na wykładach poznaliśmy pojęcie przekształcenia liniowego, czyli funkcji $\varphi : V \rightarrow W$, gdzie V i W są przestrzeniami liniowymi, spełniającej własności:

$$1^\circ \varphi(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = \varphi(\mathbf{x}) + \varphi(\mathbf{y}),$$

$$2^\circ \varphi(c\mathbf{x}) = c\varphi(\mathbf{x}).$$

Podaliśmy również pojęcie jądra przekształcenia (oznaczanego jako $\ker$), czyli zbioru wektorów, dla których przekształcenie osiąga wartość $\mathbf{0}$, oraz obrazu przekształcenia (oznaczanego jako Im), czyli zbioru wszystkich wartości przekształcenia.

Przykładowo, dla przekształcenia $\varphi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$, zadanego wzorem:

$$\varphi((x_1, x_2, x_3)) = (x_1 - 2x_2 + 2x_3, -2x_1 + 4x_2 - 4x_3)$$

jądrem będzie podprzestrzeń liniowa opisywana układem równań:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 0 \\ -2x_1 + 4x_2 - 4x_3 = 0 \end{cases},$$

a obrazem podprzestrzeni $\text{span}((1, -2), (-2, 4), (2, -4))$. Dodatkowo dowiedzieliśmy się, że aby podać wzór przekształcenia liniowego wystarczy podać jego wartości dla wektorów bazowych dziedziny. To doprowadziło nas do możliwości zapisania przekształcenia liniowego jako macierz, której kolumnami są kolejne wartości przekształcenia – w zapisie tym istotna jest jednak baza rozpatrywanych przestrzeni.

Przykładowo rozpatrzmy przekształcenie $\varphi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$, zadane wzorem:

$$\varphi((x_1, x_2, x_3)) = (2x_1 + x_2 - x_3, x_1 - x_2 + x_3).$$

Od razu jesteśmy w stanie odczytać macierz przekształcenia w bazach standardowych:

$$M(\varphi)_{\text{st}}^{\text{st}} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Gdy jednak ustalimy inne bazy dziedziny i przeciwdziedziny, np. $\mathcal{A} := ((1, 0, 1), (0, 1, 2), (2, 1, 0))$ i $\mathcal{B} := ((0, 1), (3, 0))$, to wówczas macierz w tych bazach będzie miała postać:

$$M(\varphi)_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{5}{3} \end{pmatrix},$$

bo:

$$\varphi((1, 0, 1)) = (1, 2) = 2 \cdot (0, 1) + \frac{1}{3} \cdot (3, 0)$$

$$\varphi((0, 1, 2)) = (-1, 1) = 1 \cdot (0, 1) - \frac{1}{3} \cdot (3, 0)$$

$$\varphi((2, 1, 0)) = (5, 1) = 1 \cdot (0, 1) + \frac{5}{3} \cdot (3, 0)$$

Macierz pozwala w alternatywny sposób wyznaczyć wartość przekształcenia dla danego wektora, np. w powyższym przekształceniu możemy wyznaczyć jego wartość dla wektora $(3, -1, 1)$, podstawiając go do wzoru:

$$\varphi((3, -1, 1)) = (2 \cdot 3 + (-1) - 1, 3 - (-1) + 1) = (4, 5),$$

albo mnożąc macierz i wektor:

$$\varphi((3, -1, 1)) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 3 + (-1) - 1 \\ 3 - (-1) + 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

2 Zadania

1. Które z poniższych funkcji $\varphi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ są przekształceniami liniowymi:

- a) $\varphi((x_1, x_2, x_3)) = (x_1 + 3x_2 - 1, 4x_1 + 2x_2 + 6)$,
- b) $\varphi((x_1, x_2, x_3)) = (x_1 + 3x_2 - x_3, 4x_1 + 2x_2 + 6x_3)$,
- c) $\varphi((x_1, x_2, x_3)) = (x_1 + 3x_2 - x_3, 4|x_1| + 2|x_2| + 6|x_3|)$,
- d) $\varphi((x_1, x_2, x_3)) = (x_1 + 3x_2 - x_3^2, 4x_1 + 2x_2 + x_3^2)$.

2. Znajdź wzór i macierz (w bazach standardowych) przekształcenia liniowego $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, gdy:

- a) $\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $\varphi((3, 1)) = (4, 5, -1)$, $\varphi((7, 2)) = (-3, 0, 5)$,
- b) $\varphi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\varphi((1, 2, 1)) = (7, 2)$, $\varphi((3, 2, 4)) = (20, 17)$, $\varphi((5, 1, 2)) = (17, 12)$.

3. Znajdź bazę i wymiar jądra i obrazu przekształceń:

- a) $\varphi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\varphi((x_1, x_2, x_3)) = (2x_1 + x_2 - 3x_3, x_1 + 4x_2 + 2x_3)$,
- b) $\varphi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$, $\varphi((x_1, x_2, x_3)) = (4x_1 + x_2 + 5x_3, x_1 + 2x_2 + x_3, 2x_1 - x_2 + 3x_3, 6x_1 + 7x_2 + 7x_3)$.

4. Znajdź macierz przekształcenia liniowego φ w bazach $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$, gdy:

- a) $\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^4$, $\varphi((x_1, x_2)) = (3x_1 + x_2, x_1 + 5x_2, -x_1 + 4x_2, 2x_1 + x_2)$,
 $\mathcal{A} = ((3, 1), (4, 2))$, $\mathcal{B} = ((1, 0, 1, 0), (0, 1, 1, 1), (0, 1, 2, 3), (0, 0, 0, 1))$,
- b) $\varphi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $\varphi((x_1, x_2, x_3)) = (4x_1 + x_2 + x_3, 3x_1 + 2x_2 + x_3, 3x_1 + 2x_2 + x_3)$,
 $\mathcal{A} = ((3, 1, 1), (1, 0, 0), (5, 1, 0))$, $\mathcal{B} = ((3, 4, 5), (4, 1, 1), (2, 0, 1))$.

3 Praca domowa

3.1 Zadanie za 1 punkt

5. Dla jakich wartości parametru $t \in \mathbb{R}$ funkcja $\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ określona wzorem:

$$\varphi((x_1, x_2)) = (x_1 + x_2 + (t^2 - 9)x_1x_2, 5x_1 + 3(x_2 - 1) + t)$$

jest przekształceniem liniowym?

3.2 Zadania za 2 punkty

6. Znajdź wzór i macierz (w bazach standardowych) przekształcenia liniowego $\varphi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, gdy:

$$\begin{aligned} \varphi((1, 0, 1)) &= (5, 1, 3), \\ \varphi((0, 1, 1)) &= (2, 3, 4), \\ \varphi((1, 0, 0)) &= (6, 7, 7). \end{aligned}$$

7. Znajdź bazę i wymiar jądra i obrazu przekształcenia $\varphi : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$ określonego wzorem:

$$\varphi((x_1, x_2, x_3, x_4)) = (5x_1 + 6x_2 + 4x_3 + 7x_4, x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 4x_4, 7x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 2x_4).$$

3.3 Zadania za 3 punkty

8. Znajdź macierz przekształcenia liniowego $\varphi : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^2$, określonego wzorem $\varphi((x_1, x_2, x_3, x_4)) = (5x_1 - 2x_2 + 3x_3 - x_4, 3x_1 + 4x_2 + 6x_4)$, w bazach $\mathcal{A} = ((2, 1, 0, 1), (1, 0, 3, 1), (2, 1, 1, 3), (3, 1, 2, 1))$, $\mathcal{B} = ((5, 2), (3, 1))$.

9. Niech $\varphi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ będzie przekształceniem liniowym mającym w bazach $\mathcal{A} = ((3, 1, 1), (1, 0, 0), (5, 1, 0))$, $\mathcal{B} = ((3, 4, 5), (4, 1, 1), (2, 0, 1))$ macierz:

$$M(\varphi)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Znajdź wzór na φ .