

# Matematyka dla Ciekawych Świata XVII — lista 3

## Przestrzenie liniowe

spisał Daniel Laskowski na podstawie różnych źródeł

16 marca 2026

### 1 Powtórzenie z wykładu

Na wykładzie poznaliśmy pojęcie przestrzeni liniowej, czyli zbioru wektorów  $V$  zawierającego wektor  $\mathbf{0}$ , w którym można wykonywać operację dodawania wektorów i mnożenia przez skalar spełniające następujące własności:

- 1° łączność dodawania:  $\mathbf{x} + (\mathbf{y} + \mathbf{z}) = (\mathbf{x} + \mathbf{y}) + \mathbf{z}$ ,
- 2° przemienność dodawania:  $\mathbf{x} + \mathbf{y} = \mathbf{y} + \mathbf{x}$ ,
- 3° wektor  $\mathbf{0}$  jest elementem neutralnym dodawania, tzn.  $\mathbf{x} + \mathbf{0} = \mathbf{0} + \mathbf{x} = \mathbf{x}$ ,
- 4° dla dowolnego wektora istnieje wektor przeciwny, tzn.  $\forall \mathbf{x} \in V \exists \mathbf{v} \in V : \mathbf{x} + \mathbf{v} = \mathbf{0}$ ,
- 5° rozdzielność mnożenia względem dodawania wektorów:  $c(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = c\mathbf{x} + c\mathbf{y}$ ,
- 6° rozdzielność mnożenia względem dodawania skalarów:  $(c + d)\mathbf{x} = c\mathbf{x} + d\mathbf{x}$ ,
- 7° łączność mnożenia przez skalary:  $(cd)\mathbf{x} = c(d\mathbf{x})$ ,
- 8°  $1$  jest elementem neutralnym mnożenia, tzn.  $1\mathbf{x} = \mathbf{x}$ .

Poznaliśmy także pojęcie kombinacji liniowej, tzn. wyrażenia będącego sumą skończonej liczby wektorów pomnożonych przez skalary:

$$\mathbf{y} = c_1\mathbf{x}_1 + c_2\mathbf{x}_2 + \dots + c_n\mathbf{x}_n.$$

Na mocy tego pojęcia powiedzieliśmy, że układ wektorów  $(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n)$  jest liniowo zależny, gdy któryś z wektorów daje się zapisać jako kombinacja liniowa pozostałych. W praktyce układ ten jest liniowo zależny, gdy równanie:

$$c_1\mathbf{x}_1 + c_2\mathbf{x}_2 + \dots + c_n\mathbf{x}_n = \mathbf{0}$$

ma rozwiązanie. Układem liniowo niezależnym nazywamy układ, który nie jest liniowo zależny. Dowiedzieliśmy się także, że przestrzeń liniowa daje się opisać za pomocą układu równań jednorodnych lub układu rozpinającego. Przykładowo rozwiązaniem układu równań:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 + 3x_4 = 0 \\ 2x_1 + 5x_2 + 4x_3 + 4x_4 = 0 \\ x_1 + 3x_2 + 3x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$$

jest:

$$\begin{cases} x_1 = 3x_3 - x_4 \\ x_2 = -x_3 + 2x_4 \end{cases}.$$

Zmiennymi niezależnymi są więc  $x_3$  i  $x_4$ , więc możemy za nie podstawić dowolne wartości (np. 1 i 0). Otrzymujemy w ten sposób układ rozpinający  $\text{span}((3, -2, 1, 0), (-1, 2, 0, 1))$ .

Analogicznie układowi rozpinającemu możemy przypisać układ równań. Przykładowo weźmy przestrzeń  $\text{span}((1, 2, -1, 0), (1, -1, 2, 3))$ . Jeżeli ma być ona opisywana przez równania postaci  $c_1x_1 +$

$c_2x_2 + c_3x_3 + c_4x_4 = 0$ , to w szczególności równania te muszą spełniać wektory rozpinające. Zatem należy rozwiązać układ równań:

$$\begin{cases} c_1 + 2c_2 - c_3 & = 0 \\ c_1 - c_2 + 2c_3 + 3c_4 & = 0 \end{cases}.$$

Jego rozwiązaniem jest:

$$\begin{cases} c_1 = -c_3 - 2c_4 \\ c_2 = c_3 + c_4 \end{cases},$$

a zatem możemy odczytać że w docelowym układzie równań znajdują się 2 równania (bo mamy dwie zmienne niezależne) o współczynnikach  $(-1, 1, 1, 0)$  oraz  $(-2, 1, 0, 1)$ . Toteż układ równań opisujący docelową podprzestrzeń ma postać:

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 + x_3 & = 0 \\ -2x_1 + x_2 & + x_4 = 0 \end{cases}.$$

Na koniec zdefiniowaliśmy pojęcie bazy podprzestrzeni liniowej czyli maksymalnego układu rozpinającego. Liczba wektorów w bazie informuje nas o wymiarze badanej podprzestrzeni.

## 2 Zadania

**1.** Dane są wektory  $\mathbf{x}_1 = (3, 2, 1, 1)$ ,  $\mathbf{x}_2 = (2, 7, 2, 1)$ ,  $\mathbf{x}_3 = (1, 3, 1, 3)$  oraz  $\mathbf{y}_1 = (1, 1, 1, 1)$ ,  $\mathbf{y}_2 = (2, -2, 0, 3)$  i  $\mathbf{y}_3 = (-1, 3, 1, 10)$ . Które z wektorów  $\mathbf{y}_1$ ,  $\mathbf{y}_2$ ,  $\mathbf{y}_3$  są kombinacjami liniowymi wektorów  $\mathbf{x}_1$ ,  $\mathbf{x}_2$  i  $\mathbf{x}_3$ ?

**2.** Dla jakich wartości parametru  $t \in \mathbb{R}$  wektor  $(t, 8, 6)$  jest kombinacją liniową wektorów  $(3, 4, 5)$ ,  $(1, 4, 4)$  i  $(7, 4, 7)$ .

**3.** Sprawdź czy poniższe układy są liniowo niezależne:

a)  $(3, -2, 1)$ ,  $(-1, 0, 2)$ ,  $(4, 2, 2)$ ,      b)  $(2, 6, -6, -3)$ ,  $(5, 9, -3, 3)$ ,  $(1, 1, 1, 2)$ .

**4.** Dla jakich wartości parametrów  $p, q \in \mathbb{R}$  układ  $(5, 7, p, 2)$ ,  $(1, 3, 2, 1)$  i  $(2, 2, 4, q)$  jest liniowo niezależny?

**5.** Znajdź bazy i wymiar podprzestrzeni liniowych:

a)  $\text{span}((2, 1, 4), (3, 5, -1), (3, -2, 13), (7, 7, 7), (-4, -9, 6))$ ,

b)  $\text{span}((3, 2, 1, 1), (5, 0, 2, 3), (4, 1, 4, 5), (4, 1, -1, -1))$ ,

c)  $\text{span}((2, 7, -1, 2, 6), (3, 1, 4, 2, 2), (4, -5, 9, 2, -2), (5, 15, 2, 6, 14))$ .

**6.** Znajdź bazy i wymiar podprzestrzeni liniowych opisanych układami:

$$\text{a) } \begin{cases} 9x_1 + 12x_2 + 2x_3 = 0 \\ 5x_1 + 6x_2 + 4x_3 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 0 \end{cases}, \quad \text{b) } \begin{cases} 5x_1 + 10x_2 + 6x_3 + 3x_4 = 0 \\ 2x_1 + 4x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 0 \\ 3x_1 + 6x_2 + 5x_3 + 5x_4 = 0 \end{cases}.$$

**7.** Znajdź współrzędne wektora  $\mathbf{x}$  w bazie  $\mathcal{B}$ , gdy:

a)  $\mathbf{x} = (3, 9, 14)$  i  $\mathcal{B} = ((1, 1, 1), (1, 1, 2), (0, 2, 5))$ ,

b)  $\mathbf{x} = (0, 1)$  i  $\mathcal{B} = ((1, 2), (3, 5))$ .

**8.** Opisz układem równań podprzestrzeń:

a)  $\text{span}((3, 1, 2, -1), (4, 2, 1, 5), (5, 5, 4, 3))$ ,

b)  $\text{span}((4, 1, 2, -3), (2, 3, 1, -9), (2, -1, 1, 3), (6, 4, 3, -12))$ .

**9.** Dla jakich wartości parametru  $t \in \mathbb{R}$  podprzestrzeń:

$$\text{span}((7, 9, 6, 8), (11, t, 12, t+1), (2, 1, 3, 2), (3, -4, 9, 2))$$

opisuje się tylko jednym równaniem liniowym?

## 3 Praca domowa

### 3.1 Zadania za 1 punkt

**10.** Pokaż, że wektor  $(11, 4, -8, 9)$  jest kombinacją liniową wektorów  $(2, 1, -3, 4)$ ,  $(0, 2, 5, 1)$  i  $(7, 4, 3, 2)$ .

11. Sprawdź czy układ  $(4, 2, 1, -2, 3), (5, 0, -1, 6, 1), (1, 1, 2, 2, 0)$  jest liniowo niezależny.  
 12. Podaj współrzędne wektora  $(5, 0, 0)$  w bazie  $((1, 2, -1), (1, 0, 2), (0, 1, 1))$ .

### 3.2 Zadania za 2 punkty

13. Znajdź bazę podprzestrzeni liniowej  $\text{span}((3, 2, 1, 2), (9, 6, 3, 6), (6, 6, 6, 5), (6, 8, 10, 6))$ .  
 14. Znajdź bazę i wymiar podprzestrzeni liniowej opisanej układem:

$$\begin{cases} 7x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 2x_4 + 8x_5 = 0 \\ 3x_1 + x_2 + x_3 - 4x_4 + 6x_5 = 0 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 + x_5 = 0 \end{cases}.$$

15. Pokaż, że wektory  $\mathbf{x}_1 = (3, 2, 1)$ ,  $\mathbf{x}_2 = (7, 3, 1)$ ,  $\mathbf{x}_3 = (4, 2, 1)$  są bazą przestrzeni  $\mathbb{R}^3$ . Znajdź współrzędne wektorów  $\mathbf{y}_1 = (0, 2, 1)$ ,  $\mathbf{y}_2 = (1, 1, 2)$  i  $\mathbf{y}_3 = (1, 0, 0)$  w tej bazie.

### 3.3 Zadania za 3 punkty

16. Opisz układem równań podprzestrzeń:

$$\text{span}((5, 1, 9, 0, 2), (5, 2, -2, 5, -1), (4, 1, 5, 1, 1)).$$

17. Wiadomo, że układ  $(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n)$  jest liniowo niezależny. Pokaż, że układ

$$(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 + \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_3 + \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n + \mathbf{x}_{n-1})$$

też jest liniowo niezależny.

18. Wiadomo, że układ  $(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n)$  jest liniowo niezależny. Pokaż, że układ

$$(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2 + \mathbf{x}_3, \dots, \mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2 + \dots + \mathbf{x}_n)$$

też jest liniowo niezależny.

19. Oznaczmy jako  $\mathbb{R}[x]$  zbiór wielomianów o współczynnikach będących liczbami rzeczywistymi, czyli  $\mathbb{R}[x] := \{a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n : n \in \mathbb{N} \cup \{0\} \wedge \forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\} \ a_n \in \mathbb{R}\}$ . Pokaż, że ten zbiór jest przestrzenią liniową. Jaki jest wymiar tej przestrzeni?

Wskazówka: Sprawdź prawdziwość aksjomatów przestrzeni liniowej. Zastanów się co mogłoby być bazą tej przestrzeni.