

# Matematyka dla Ciekawych Świata XVII — lista 2

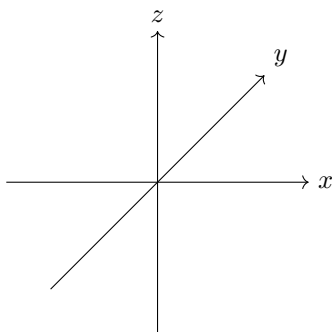
## Układ współrzędnych i wektory

spisał Daniel Laskowski na podstawie różnych źródeł

9 marca 2026

### 1 Powtórzenie z wykładu

Na wykładzie zauważyliśmy, że znany ze szkoły układ współrzędnych można swobodnie poszerzyć do przestrzeni trójwymiarowej, poprzez dodanie kolejnej osi:



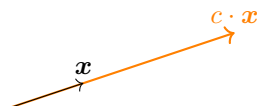
Dodatkowo poznaliśmy pojęcie wektora jako uporządkowanej pary punktów. Współrzędne wektora  $\overrightarrow{pq}$  między punktami  $p = (x_p, y_p)$  i  $q = (x_q, y_q)$  wyznaczaliśmy, obliczając różnicę:

$$\overrightarrow{pq} = q - p = (x_q - x_p, y_q - y_p).$$

Wprowadziliśmy także podstawowe operacje na wektorach takie jak (wszędzie przyjmujemy oznaczenia współrzędnych  $\mathbf{x} := (x_1, x_2, \dots, x_n)$ ,  $\mathbf{y} := (y_1, y_2, \dots, y_n)$ ):

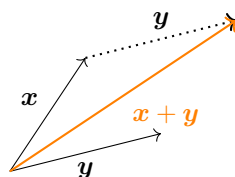
- mnożenie przez skalar ( $c \in \mathbb{R}$ ):

$$c \cdot \mathbf{x} = (cx_1, cx_2, \dots, cx_n)$$



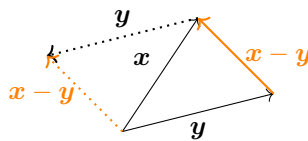
- dodawanie wektorów:

$$\mathbf{x} + \mathbf{y} = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n)$$



- odejmowanie wektorów:

$$\mathbf{x} - \mathbf{y} = (x_1 - y_1, x_2 - y_2, \dots, x_n - y_n)$$



- iloczyn skalarny:

$$\mathbf{x} \circ \mathbf{y} = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n.$$

Iloczyn skalarny choć nie jest wektorem niesie informację na temat kąta pomiędzy wektorami, mianowicie  $\mathbf{x}$  jest prostopadły do  $\mathbf{y}$  wtedy i tylko wtedy, gdy  $\mathbf{x} \circ \mathbf{y} = 0$ .

Wprowadziliśmy także równanie prostej w postaci kierunkowej  $y = ax + b$ . Równaniem tym nie da się jednak opisać prostej pionowej. Uniwersalnym równaniem jest równanie w postaci ogólnej  $Ax + By + C = 0$ , do którego trzeba dodać założenie, że  $A$  i  $B$  nie są równocześnie równe 0 (czyli  $A^2 + B^2 \neq 0$ ). Poznaliśmy także równanie okręgu o środku w punkcie  $(a, b)$  i promieniu  $r > 0$ , wyrażone wzorem  $(x - a)^2 + (y - b)^2 = 0$ .

## 2 Zadania

1. Dane są punkty  $\mathbf{p} := (-3, 2)$ ,  $\mathbf{q} := (1, 4)$ ,  $\mathbf{r} := (3, -5)$  i  $\mathbf{s} := (-1, -7)$ . Oblicz współrzędne wektorów:

a)  $\overrightarrow{pq} + 2\overrightarrow{rs}$ ,    b)  $3\overrightarrow{qr} - \frac{1}{2}\overrightarrow{rs}$ ,    c)  $\overrightarrow{pr} + \overrightarrow{sq} + \overrightarrow{rs} + \overrightarrow{qp}$ ,    d)  $4\overrightarrow{ps} - 6\overrightarrow{qr} + 5\overrightarrow{qs}$ .

2. Dane są wektory  $\mathbf{x} = (3, -1)$  i  $\mathbf{y} = (5, 3)$ . Znajdź taki wektor  $\mathbf{v}$ , że:

$$\frac{1}{2}\mathbf{y} = -\frac{1}{2}\mathbf{x} - 2\mathbf{v}.$$

3. Jaką długość ma wektor  $(x, y)$ ? Jaką długość ma wektor  $(x, y, z)$ ?

4. Sprawdź czy czworokąt o wierzchołkach w punktach  $(-2, 1)$ ,  $(-1, -1)$ ,  $(2, 5)$  i  $(0, 3)$  jest równoległobokiem.

5. Wyznacz równanie kierunkowe prostej przechodzącej przez punkty:

a)  $(0, -2)$  i  $(5, 3)$     b)  $(0, 54)$  i  $(-18, 0)$     c)  $(1 - \sqrt{2}, 4 + \sqrt{2})$  i  $(0, 3)$ .

6. Dane są dwa różne punkty  $\mathbf{p} := (x_p, y_p)$  i  $\mathbf{q} := (x_q, y_q)$ . Jak będzie wyglądało równanie kierunkowe prostej przechodzącej przez punkty  $\mathbf{p}$  i  $\mathbf{q}$ ?

7. Naszkicuj proste określone równaniami:

a)  $y = -2x + 1$     b)  $y = 2x + 4$     c)  $y = \frac{1}{2}x - 2$     d)  $y = 3$ .

Jakie wnioski geometryczne na temat znaczenia współczynników w równaniu kierunkowym prostej zauważasz?

8. Kiedy dwie proste wyrażone równaniami kierunkowymi są równoległe? Kiedy są prostopadłe?

9. Dla jakich wartości parametru  $m \in \mathbb{R}$  proste  $y = (m^2 + 1)x - 2$  i  $y = (2m^2 - 3)x - 2m - 1$  są równoległe?

10. Wyznacz równanie ogólne prostej przechodzącej przez punkty:

a)  $(0, 8)$  i  $(2, 4)$     b)  $(-4, 3)$  i  $(-4, 11)$     c)  $(-3, 2)$  i  $(4, 9)$ .

11. Znajdź równanie okręgu:

- a) o środku w punkcie  $(3, -2)$  i promieniu  $r = \frac{1}{3}$ ,  
 b) o środku w punkcie  $(-2, 1)$ , do którego należy punkt  $(4, 7)$ ,  
 c) przechodzącego przez punkty  $(1, 5)$ ,  $(8, -2)$  i  $(9, 1)$ .

12. Znajdź współrzędne środka i promień okręgu o równaniu:

a)  $x^2 + y^2 - 2x - 6y + 9 = 0$ ,    b)  $x^2 + y^2 + 4y - 5 = 0$ .

13. Czy równanie  $x^2 - 2x + y^2 - 2y + 3 = 0$  opisuje okrąg?

14. Znajdź punkt przecięcia prostych  $k: y = 2x - 1$  i  $l: x + 2y - 6 = 0$ .

15. Znajdź współrzędne punktów wspólnych prostej  $k: x + 2y + 4 = 0$  i okręgu  $\omega: x^2 + y^2 + 8x + 4y + 19 = 0$ .

### 3 Praca domowa

#### 3.1 Zadania za 1 punkt

16. Wyznacz wartości parametrów  $p, q \in \mathbb{R}$  tak, aby wektory  $(3p + 5q, 2p - 6)$  i  $(p + 4, -2q + 3)$  były równe.
17. Dla jakich wartości parametrów  $p, q \in \mathbb{R}$  prawdziwa jest równość  $p \cdot (1, -1) + q \cdot (2, 1) = (-5, -7)$ .
18. Dla jakich wartości parametru  $p \in \mathbb{R}$  proste  $k : y = |4 + p| \cdot x - 8$  i  $l : y = 3x + 2$  są równoległe? Dla jakich wartości parametru  $p \in \mathbb{R}$  są one prostopadłe?

#### 3.2 Zadania za 2 punkty

19. Wiadomo, że punkty  $(-3, -1)$ ,  $(1, 2)$  i  $(2, 5)$  są kolejnymi wierzchołkami równoległoboku. Wyznacz współrzędne czwartego wierzchołka oraz punktu przecięcia jego przekątnych.
20. Dany jest czworokąt o wierzchołkach  $(-4, 1)$ ,  $(0, -2)$ ,  $(3, 2)$  i  $(-1, 5)$ . Udowodnij, że jest on kwadratem.
21. Naskicuj w układzie współrzędnych zbiór opisany równaniem  $y^2 = (x + 3)^2$ .  
Wskazówka: Zastanów się kiedy kwadraty dwóch liczb są równe.

#### 3.3 Zadania za 3 punkty

22. Za pomocą rachunku wektorowego udowodnij, że odcinek łączący środki ramion trójkąta jest równoległy do jego podstawy, a jego długość jest równa połowie długości podstawy.
23. Pokaż, że wektor  $(A, B)$  jest prostopadły do prostej  $Ax + By + C = 0$  ( $A^2 + B^2 \neq 0$ ).
24. Pokaż, że jeśli  $c - \frac{a^2}{4} - \frac{b^2}{4} = 0$  to równanie  $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$  opisuje punkt. Jaki to punkt?