Matematyka dla Ciekawych Świata XVII — lista 1
Układy równań

spisał Daniel Laskowski na podstawie różnych źródeł

2 marca 2026

1 Powtórzenie z wykładu

Na wykładzie poznaliśmy metodę rozwiązywania układów równań zwaną metodą eliminacji Gaussa. Polega ona na przypisaniu do układu równań macierzy, poprzez wpisanie w nią współczynników tegoż. Przykładowo, układowi:

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} 2x & + & 3y & - & z & = & 7 \\ x & & & + & 2z & = & -1 \end{array}\right.$$

odpowiada macierz:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & 7 \\ 1 & 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Aby rozwiązać taki układ, należy za pomocą operacji elementarnych (czyli mnożenia wierszy, zamiany miejscami wierszy lub odejmowania wierszy od siebie) sprowadzić macierz do postaci schodkowej zredukowanej, czyli takiej, w której:

- kolejne wiersze zaczynają się „bardziej na prawo” niż poprzednie,
- pierwszym niezerowym wyrazem w każdym wierszu jest 1,
- wyraz z poprzedniego punktu jest jedynym niezerowym wyrazem w swojej kolumnie.

Przykładowo w powyższym układzie mamy:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & 7 \\ 1 & 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{W_1-2W_2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -5 & 9 \\ 1 & 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{W_1 \leftrightarrow W_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -5 & 9 \end{pmatrix}$$
$$\xrightarrow{W_2 : -5} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{-9}{5} \end{pmatrix} \xrightarrow{W_1-2W_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{13}{5} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{9}{5} \end{pmatrix}.$$

Z macierzy można zatem odczytać rozwiązanie układu równań, w którym:

$$\left\{\begin{array}{l} x = \frac{13}{5} \\ z = -\frac{9}{5} \end{array}\right. ,$$

a y jest dowolny.

2 Zadania

1. Rozwiąż układy równań metodami podstawiania lub przeciwnych współczynników:

a) $\left\{\begin{array}{rcrcr} 2x & - & 5y & = & 9 \\ 4x & + & 19y & = & 47 \end{array}\right. ,$

b) $\left\{\begin{array}{rcrcr} 5x & - & 3y & = & 9 \\ 7x & + & 4y & = & 29 \end{array}\right. ,$

c) $\begin{cases} x + y + z = 20 \\ x + y - z = -2 \\ x - 3y + 2z = 3 \end{cases}$.

2. Sprowadź macierze do postaci schodkowej zredukowanej:

a) $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 & 2 \\ -2 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$, b) $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & -1 \\ 5 & -1 & 1 & 2 \\ 7 & 8 & 1 & -7 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, c) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & t \\ 2 & 1 & t \\ -1 & 1 & -3 \end{pmatrix}$.

3. Które z czwórek $(-1, 1, 1, -1)$, $(2, 3, 1, 4)$, $(4, -3, 2, 1)$, $\left(4, 0, -3, \frac{1}{2}\right)$ spełniają układ równań:

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 2x_4 = 1 \\ 7x_1 + 5x_2 + 9x_3 + 4x_4 = 3 \\ 5x_1 - 3x_2 + 7x_3 + 4x_4 = 1 \end{cases}$$

4. Rozwiąż metodą eliminacji Gaussa układy równań:

a) $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 = 1 \\ 4x_1 + 6x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 3 \\ 6x_1 + 9x_2 + 5x_3 + 2x_4 = 5 \end{cases}$,

b) $\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 + 2x_5 = 2 \\ 3x_1 + 9x_2 + 7x_3 + 4x_4 + 4x_5 = 7 \\ 5x_1 + 15x_2 + 11x_3 + 6x_4 + 8x_5 = 11 \\ 2x_1 + 6x_2 + 5x_3 + 3x_4 + 2x_5 = 5 \end{cases}$,

c) $\begin{cases} 3x_1 + 9x_2 - 2x_3 + 17x_4 - 13x_5 = 16 \\ 2x_1 + 7x_2 + 7x_4 - 2x_5 = 11 \\ 2x_1 + 5x_2 - 2x_3 + 13x_4 - 13x_5 = 11 \\ x_1 + 3x_2 - x_3 + 5x_4 - 4x_5 = 5 \end{cases}$,

d) $\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 + 8x_3 = 1 \\ 6x_1 - 3x_2 - 4x_3 = 4 \\ 7x_1 + 4x_2 + 9x_3 = 6 \\ 4x_1 - 5x_2 - 4x_3 = -2 \end{cases}$.

5. Dla jakich wartości parametru $t \in \mathbb{R}$ poniższy układ nie jest sprzeczy? Znajdź jego rozwiązanie dla wyznaczonego t.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 = 3 \\ 3x_1 + 8x_2 + 8x_3 + 7x_4 = 9 \\ 2x_1 + 5x_2 + 6x_3 + 5x_4 = 7 \\ x_1 + 3x_2 + 4x_3 + tx_4 = 5 \end{cases}$$

6. Dla jakich wartości parametru $t \in \mathbb{R}$ poniższy układ jest sprzeczny? Kiedy jest nieoznaczony?

$$\begin{cases} tx + y + z = t - 1 \\ x + ty + z = 1 - t \\ x + y + tz = 0 \end{cases}$$

3 Praca domowa

3.1 Zadania za 1 punkt

7. Rozwiąż układ równań:

$$\begin{cases} 5x - 3y = 20 \\ -9x + y = 8 \end{cases}.$$

8. Sprowadź macierz do postaci schodkowej zredukowanej:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 3 & 4 \\ 5 & 7 & 1 \\ 3 & 4 & -1 \end{pmatrix}.$$

3.2 Zadania za 2 punkty

9. Rozwiąż układ równań:

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcrcr} 3x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & + & 4x_4 & + & 3x_5 & = & 1 \\ 5x_1 & + & 8x_2 & + & 2x_3 & + & 5x_4 & + & 8x_5 & = & 4 \\ 4x_1 & - & 2x_2 & + & x_3 & + & 7x_4 & + & x_5 & = & 2 \end{array}\right. .$$

10. Dla jakich wartości parametru $t \in \mathbb{R}$ piątka $\left(t^2, -1, 1, -t^2, 1\right)$ jest rozwiązaniem poniższego układu?

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcrcr} 7x_1 & - & 5x_2 & - & 3x_3 & + & 5x_4 & - & 5x_5 & = & -1 \\ 9x_1 & + & 8x_2 & - & 9x_3 & + & 2x_4 & + & 11x_5 & = & 1 \\ -4x_1 & + & 6x_2 & + & 2x_3 & - & x_4 & + & 9x_5 & = & 2 \end{array}\right.$$

3.3 Zadania za 3 punkty

11. Dla jakich wartości parametru $t \in \mathbb{R}$ poniższy układ jest sprzeczny?

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & + & 2x_2 & + & 2x_3 & - & 3x_4 & = & 2 \\ 2x_1 & + & 4x_2 & + & 3x_3 & + & 8x_4 & = & 7 \\ 3x_1 & + & 6x_2 & + & 5x_3 & + & 5x_4 & = & t \end{array}\right.$$

12. Dla jakich wartości parametru $t \in \mathbb{R}$ poniższy układ nie jest sprzeczny?

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} tx_1 & + & x_2 & - & 2x_3 & + & x_4 & = & t \\ x_1 & + & tx_2 & + & x_3 & + & tx_4 & = & 3 \\ x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & + & 2x_4 & = & 2 \end{array}\right.$$