

---

# Wykład 8. Twierdzenie Nasha

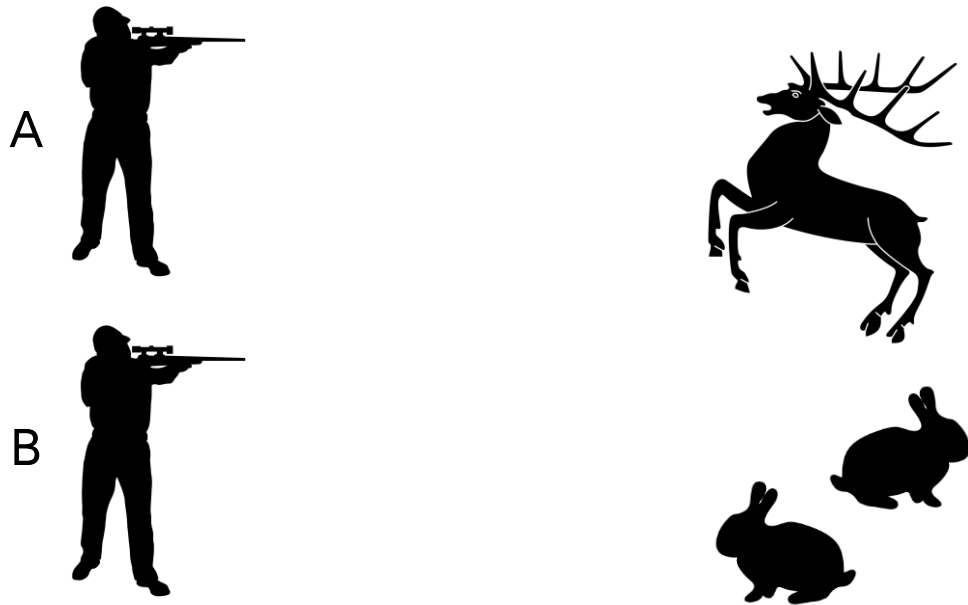


Piotr Morawiecki  
28 kwietnia 2025

---

# Powtórka z poprzedniego wykładu

- **Równowaga Nasha** – profil strategii, w którym strategia każdego z graczy jest optymalna, przyjmując wybór innych graczy za ustalony.



|         |       | Gracz A |         |
|---------|-------|---------|---------|
|         |       | Jeleń   | Zając   |
| Gracz B | Jeleń | $4 / 4$ | $0 / 2$ |
|         | Zając | $2 / 0$ | $2 / 2$ |

W tej grze istnieją dwa stany równowagi Nasha:

- Obaj gracze polują na jelenia.
- Obaj gracze polują na zająca.

# Strategie czyste i mieszane

*Strategia czysta* – strategia, w której każdy gracz dokonuje zawsze jednego konkretnego wyboru

- Czy w grze w *papier, kamień, nożyce* istnieje równowaga Nasha w strategiach czystych?



*Strategia mieszana* – strategia, która określa prawdopodobieństwa, z jakimi gracz wybiera każdą ze strategii czystych.

- Czy w grze w papier, kamień, nożyce istnieje równowaga Nasha w strategiach mieszanych?



|         |        | Gracz B |        |        |
|---------|--------|---------|--------|--------|
|         |        | Papier  | Kamień | Nożyce |
| Gracz A | Papier | 0 / 0   | 1 / -1 | -1 / 1 |
|         | Kamień | -1 / 1  | 0 / 0  | 1 / -1 |
|         | Nożyce | 1 / -1  | -1 / 1 | 0 / 0  |

---

# Twierdzenie Nasha

Każda skończona gra ma równowagę Nasha  
w strategiach mieszanych.

*Gra skończona* – gra, która zawsze kończy się po skończonej liczbie ruchów.

---

## Polowanie na jelenia c.d. (1/4)

- Oznaczmy prawdopodobieństwo, że gracz A zapoluje na jelenia jako  $p$ , a prawdopodobieństwo, że gracz B zapoluje na jelenia jako  $q$ .
- Wartość oczekiwana wypłaty dla gracza A wynosi:

$$E(V_A) = 4 \underbrace{pq}_{\text{Prawdopodobieństwo, że obaj gracze zapolują na jelenia}} + 2 \underbrace{(1-p)}_{\text{Prawdopodobieństwo, że gracz A zapoluje na zająca}}$$

- Chcemy znaleźć takie wartości  $p$  i  $q$ , że żadnemu z graczy nie będzie opłacało się zmieniać strategii.

|         |       | Gracz A |       |
|---------|-------|---------|-------|
|         |       | Jeleń   | Zając |
| Gracz B | Jeleń | 4 / 4   | 0 / 2 |
|         | Zając | 2 / 0   | 2 / 2 |

## Polowanie na jelenia c.d. (2/4)

$$E(V_A) = 4pq + 2(1 - p)$$

- Możemy przekształcić ją następująco:

$$E(V_A) = 4pq + 2 - 2p$$

$$E(V_A) = (4q - 2)p + 2$$

- Kiedy wypłata gracza A nie zależy od prawdopodobieństwa, z jakim zapoluje on na jelenia ( $p$ )?

Kiedy  $q = \frac{1}{2}$ :

$$E(V_A) = 0 \cdot p + 2$$

|         |       | Gracz A |       |
|---------|-------|---------|-------|
|         |       | Jeleń   | Zając |
| Gracz B | Jeleń | 4 / 4   | 0 / 2 |
|         | Zając | 2 / 0   | 2 / 2 |

## Polowanie na jelenia c.d. (3/4)

- Analogicznie wypłata gracza B:

$$E(V_B) = (4p - 2)q + 2$$

nie będzie zależała od prawdopodobieństwa  $q$ ,  
z jakim zapoluje on na jelenia, jeśli  $p = 1/2$ .

- Podsumowując:

Jeśli  $p = \frac{1}{2}$  i  $q = \frac{1}{2}$ , to żaden z graczy nie może zwiększyć wartości oczekiwanej swojej wypłaty poprzez zmianę strategii.

|         |       | Gracz A |       |
|---------|-------|---------|-------|
|         |       | Jeleń   | Zając |
| Gracz B | Jeleń | 4 / 4   | 0 / 2 |
|         | Zając | 2 / 0   | 2 / 2 |

## Polowanie na jelenia c.d. (4/4)

Mamy zatem trzy stany równowagi Nasha:

- 1) Obaj gracze polują na jelenia
  - 2) Obaj gracze polują na zająca
  - 3) Każdy z graczy z prawdopodobieństwem  $\frac{1}{2}$  zapoluje na jelenia i z prawdopodobieństwem  $\frac{1}{2}$  zapoluje na zająca.
- strategie czyste
- (strategia mieszana)

|         |       | Gracz A |       |
|---------|-------|---------|-------|
|         |       | Jeleń   | Zając |
| Gracz B | Jeleń | 4 / 4   | 0 / 2 |
|         | Zając | 2 / 0   | 2 / 2 |

---

# Dylemat ochotnika

- Każdy z graczy niezależnie od pozostałych może zdecydować czy pojedzie kupić tort urodzinowy.
- Jeśli choć jeden z graczy zgłosi się na ochotnika to:
  - Ochotnik dostaje **wypłatę 0**.
  - Wszyscy inni gracze dostają **wypłatę +1**.
- Jeśli nikt się nie zgłosi na ochotnika to wszyscy gracze dostają **wypłatę -1**.

Wejdź na  
[goo.gl/bY4SRv](https://goo.gl/bY4SRv)  
i zagłosuj



---

# Dylemat ochotnika: strategie czyste

Czy w tej grze istnieją równowagi Nasha w strategiach czystych?

Tak i do dość sporo!

- Gracz 1 zgłasza się na ochotnika, pozostali nie.
- Gracz 2 zgłasza się na ochotnika, pozostali nie.
- ...
- Gracz  $N$  zgłasza się na ochotnika, pozostali nie.

$N$  – liczba graczy

---



---

# Dylemat ochotnika: strategie mieszane (1/3)

- Poszukajmy symetrycznej równowagi Nasha, tzn. takiej w której wszyscy gracze stosują tę samą strategię. Oznaczmy prawdopodobieństwo **nie** zgłoszenia się gracza na ochotnika jako  $q$ .
- Jeśli zgłosimy się na ochotnika z prawdopodobieństwem  $p$  to wartość oczekiwana naszej wypłaty wyniesie:

$$E(V) = (-1) \cdot \underbrace{p \cdot q^{N-1}} + (1) \cdot p \cdot \underbrace{(1 - q^{N-1})} + 0 \cdot (...)$$

Prawdopodobieństwo, że nikt  
się nie zgłosi na ochotnika

Prawdopodobieństwo, że co  
najmniej jeden inny gracz się  
zgłosi na ochotnika

- Przekształcając to wyrażenie dostaniemy:

$$E(V) = -pq^{N-1} + p - pq^{N-1}$$

$$E(V) = p(1 - 2q^{N-1})$$

---

---

## Dylemat ochotnika: strategie mieszane (2/3)

$$E(V) = p(1 - 2q^{N-1})$$

- Prawdopodobieństwo zgłoszenia się na ochotnika nie będzie miało wpływu na wartość oczekiwaną naszej wypłaty jeśli:

$$1 - 2q^{N-1} = 0$$

$$2q^{N-1} = 1$$

$$q^{N-1} = \frac{1}{2}$$

$$q = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{N-1}}$$

Jeśli wszyscy gracze z tym prawdopodobieństwem nie będą zgłaszać się na ochotnika, to zmiana strategii nie będzie korzystna dla żadnego z graczy.

Zatem jest to **symetryczna równowaga Nasha**.

---

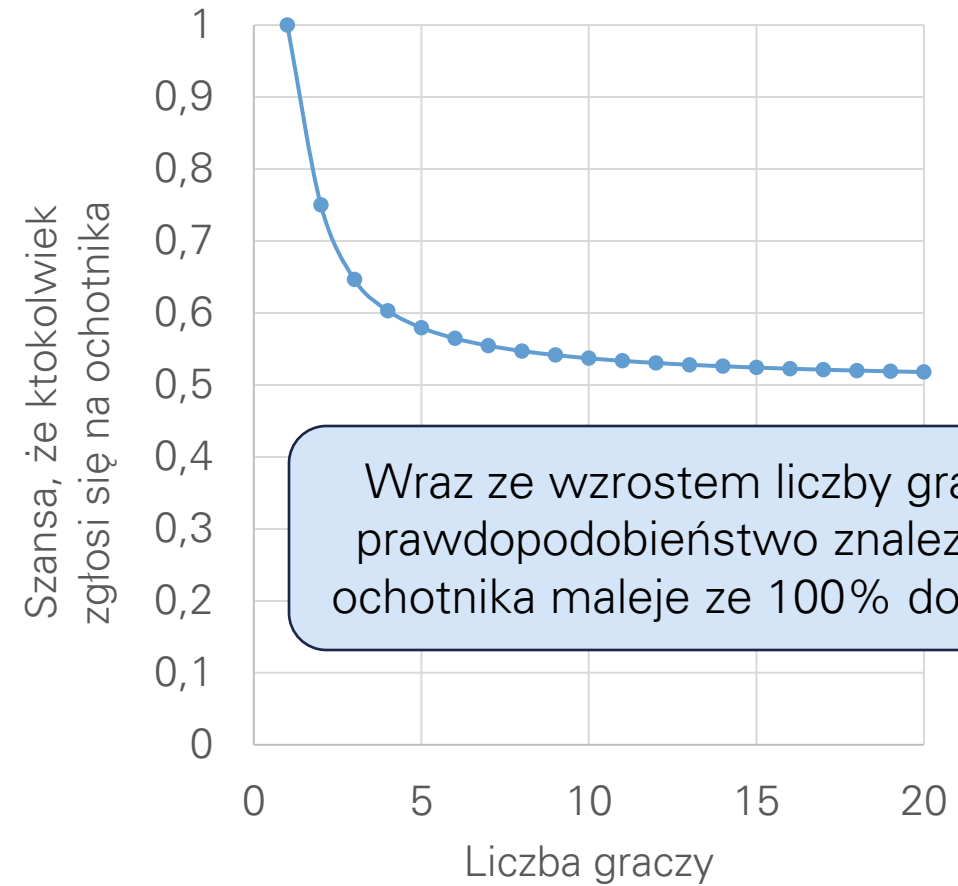
# Dylemat ochotnika: strategie mieszane (3/3)

$$q = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{N-1}}$$

prawdopodobieństwo z jakim gracze nie zgłoszą się na ochotnika

Jakie jest prawdopodobieństwo, że żaden z graczy nie zgłosi się na ochotnika?

$$q^N = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{N}{N-1}}$$



Wraz ze wzrostem liczby graczy, prawdopodobieństwo znalezienie ochotnika maleje ze 100% do 50%.

# Dylemat ochotnika a „Bystander effect”

- Zgodnie z naszym modelem, im więcej jest potencjalnych ochotników, tym mniejsza jest szansa, że ktoś się zgłosi.
- W naukach społecznych zjawisko to nazywa się rozproszeniem odpowiedzialności (lub też *bystander effect*) i jest powszechnie badane od czasu zabójstwa Kitty Genovese (1964).



---

## Gra w cykora (1/3)



---

## Gra w cykora (2/3)

|         |                 | Gracz A |                 |
|---------|-----------------|---------|-----------------|
|         |                 | Ucieka  | Jedzie do końca |
| Gracz B | Ucieka          | 0 / 0   | -1 / +1         |
|         | Jedzie do końca | +1 / -1 | -100 / -100     |

- Jakiego występują w tej grze stany równowagi Nasha w **strategiach czystych**?
    - Gracz A ucieka, a gracz B jedzie do końca.
    - Gracz A jedzie do końca, a gracz B ucieka.
-

## Gra w cykora (3/3)

- Oznaczmy prawdopodobieństwo, że gracz A będzie jechał do końca jako  $p$ , a prawdopodobieństwo, że gracz B będzie jechał do końca jako  $q$ .
- Wartość oczekiwana dla gracza A wyniesie wówczas:

$$E(V_A) = pq \cdot (-100) + p(1 - q) \cdot (+1) + q(1 - p) \cdot (-1)$$

$$E(V_A) = -100pq + p - pq - q + pq$$

$$E(V_A) = (100q + 1)p - q$$

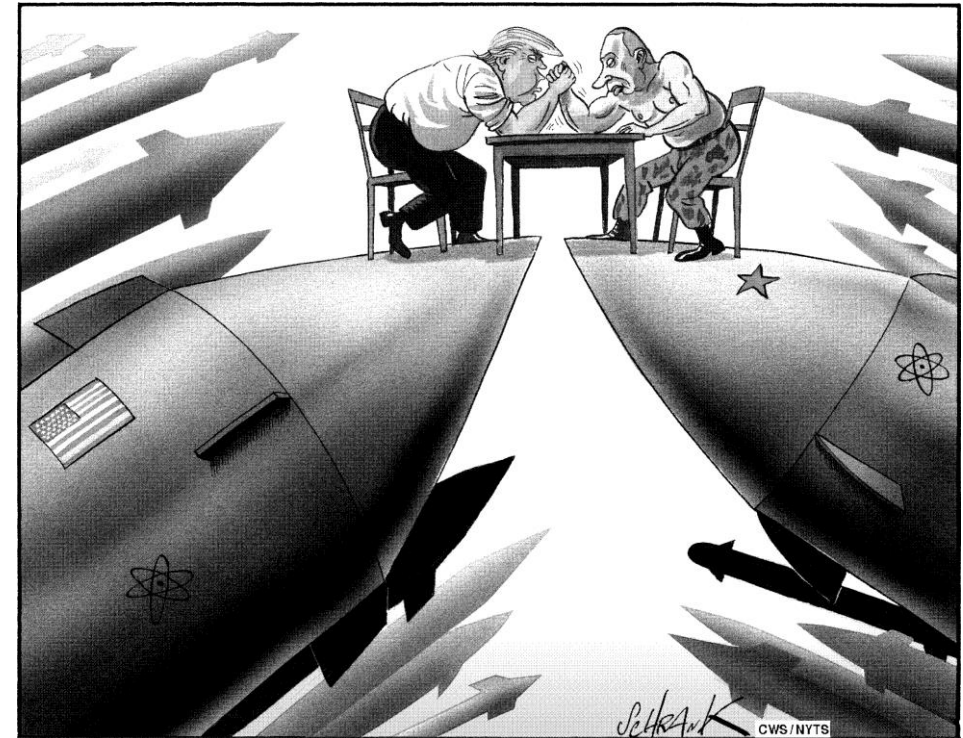
- Wartość oczekiwana dla gracza A nie zależy od jego strategii  $p$ , kiedy  $q = \frac{1}{100} = 1\%$ .

- Zatem stanem równowagi Nasha jest strategia mieszana z  $p = q = 1\%$ .

|         |                 | Gracz A |                 |
|---------|-----------------|---------|-----------------|
|         |                 | Ucieka  | Jedzie do końca |
| Gracz B | Ucieka          | 0 / 0   | -1 / +1         |
|         | Jedzie do końca | +1 / -1 | -100 / -100     |

---

# Polityczna gra na przetrzymanie (brinkmanship)



---

# Podsumowanie wykładu

- Strategię można podzielić na **strategie czyste**, w których gracze stosują jedną z góry ustaloną strategię, i **strategie mieszane**, w których gracze określają prawdopodobieństwo, z jakimi wybierają każdą ze strategii czystych.
- Zgodnie z **twierdzeniem Nasha** w każdej skończonej grze istnieje stan równowagi Nasha w strategiach czystych lub mieszanych.
- Na kilku przykładach nauczyliśmy się znajdować stan równowagi Nasha w strategiach mieszanych.

