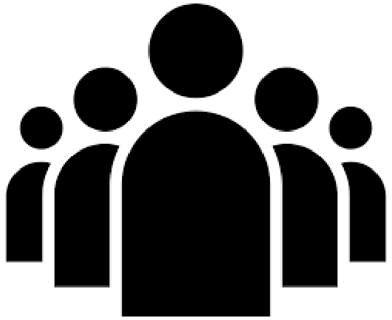
Wykład 6. Wprowadzenie do teorii gier

Piotr Morawiecki

7 kwietnia 2025

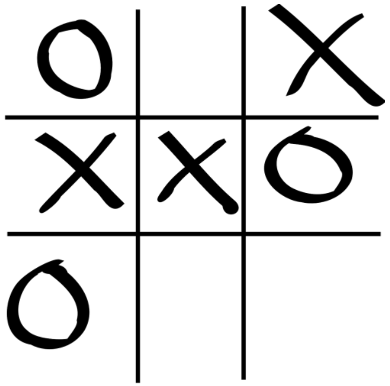
Czym jest gra?



1. Gracze

2. Cel

3. Akcje



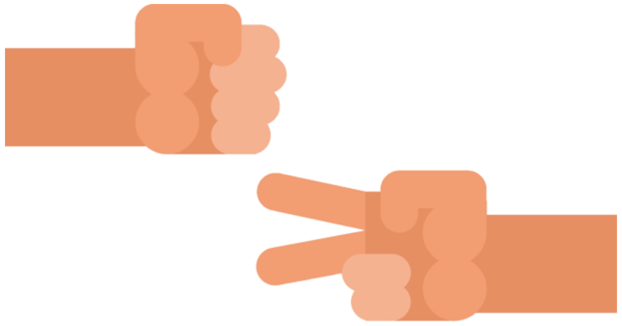
4. Interakcja

Przykłady gier

Dwie postaci gier

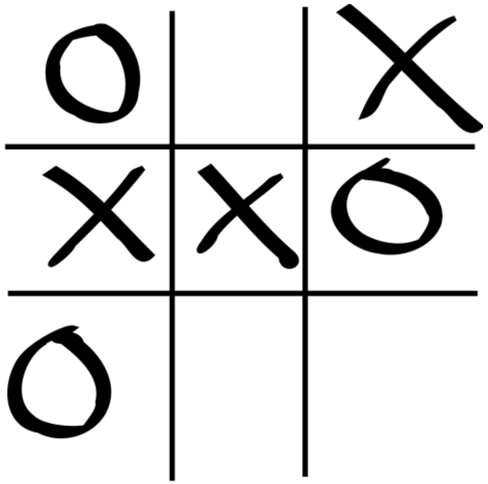
GRY W POSTACI NORMALNEJ

Gracze wykonują ruchy jednocześnie nie znając decyzji pozostałych graczy.



GRY W POSTACI EKSTENSYWNEJ

Gracze wykonują ruchy po kolei, znając ruch pozostałych graczy.



Funkcja wypłaty

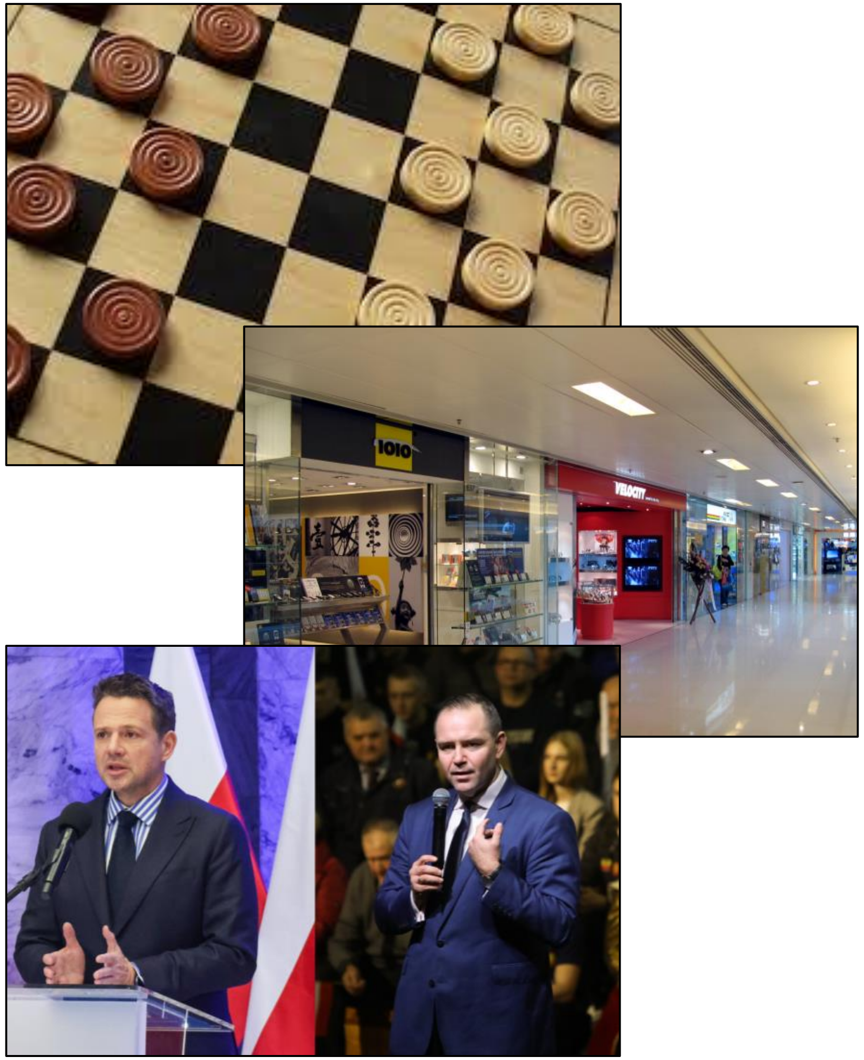
- Cel gry opisujemy w teorii gier za pomocą tzw. funkcji wypłaty, która akcjom wykonanym przez każdego z graczy przypisuje liczbę (tzw. *wypłatę*).

Strategia gracza 1
Strategia gracza 2
…
Strategia gracza N

Funkcja wypłaty →

Wypłata gracza 1
Wypłata gracza 2
…
Wypłata gracza N

- Celem gry jest uzyskanie jak najwyższej wypłaty.



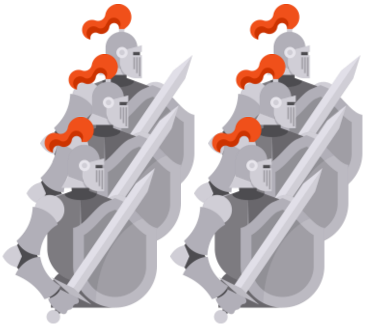
Funkcja wypłaty

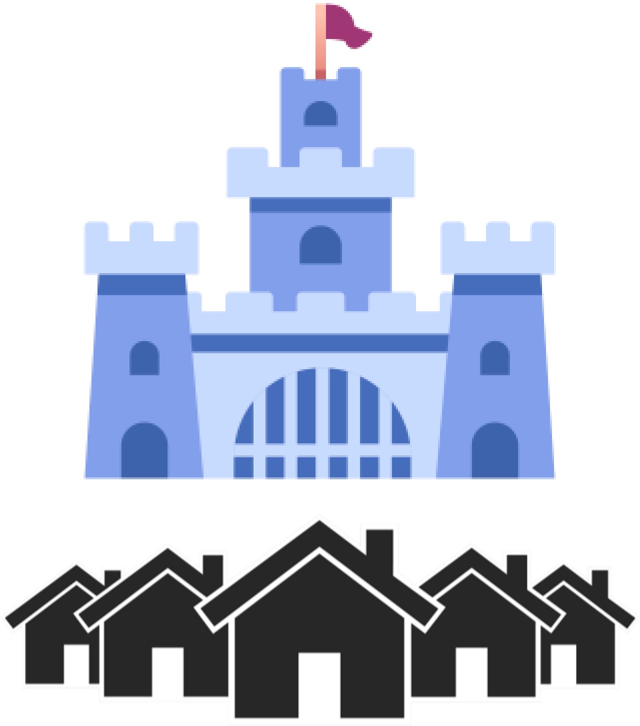
- Cel gry opisujemy w teorii gier za pomocą tzw. funkcji wypłaty, która akcjom wykonanym przez każdego z graczy przypisuje liczbę (tzw. *wypłatę*).
- Celem gry jest uzyskanie jak najwyższej wypłaty.
- W grach w postaci normalnej, możliwe wypłaty często przedstawia się za pomocą tzw. *macierzy wypłat*.
- Jeśli suma wypłat dla wszystkich graczy zawsze jest równa 0, to grę nazywamy *grą o sumie zerowej*.

Gracz B

Gracz A	Papier	Kamień	Nożyce
Papier	0 / 0	1 / -1	-1 / 1
Kamień	-1 / 1	0 / 0	1 / -1
Nożyce	1 / -1	-1 / 1	0 / 0

Przykład 1: Atak na zamek (1/4)





Gracz B

Gracz A

	Broń się	Uciekaj
Plądruj	1 / -1	2 / -2
Zdobywaj	0 / 0	3 / -3

Przykład 1: Atak na zamek (2/4)

- Dla każdej akcji gracza A sprawdźmy jaki jest najmniej korzystny dla niego wynik.

Gracz B

Gracz A	Broń zamek	Opuść zamek	
Plądruj	1 / -1	2 / -2	→ 1 (najgorszy możliwy wynik przy plądrowaniu)
Zaatakuj	0 / 0	3 / -3	→ 0 (najgorszy możliwy wynik przy ataku)

- Gracz A powinien wybrać akcję, dla której ma najwyższą wypłatę w najgorszym scenariuszu

$$v = \max_{a \in \text{akcje gracza A}} \left(\min_{b \in \text{akcje gracza B}} V(a,b) \right) = 1$$

(wypłata gracza A)

Przykład 1: Atak na zamek (3/4)

- Dla każdej akcji gracza B sprawdźmy jaki jest najmniej korzystny dla niego wynik.

Gracz B

Gracz A	Broń zamek	Opuść zamek	
Plądruj	1 / -1	2 / -2	-1 (najgorszy możliwy wynik przy obronie)
Zaatakuj	0 / 0	3 / -3	-3 (najgorszy możliwy wynik przy ucieczce)

- Gracz B może wybrać tą akcję, dla której ma najwyższą wypłatę w najgorszym scenariuszu

$$v = \min_{b\,\in\,\text{akcje gracza B}} \left(\max_{a\,\in\,\text{akcje gracza A}} V(a,b) \right) = 1$$

(wypłata gracza A)

Przykład 1: Atak na zamek (4/4)

Podsumowując:

$$v = \max_{a \in \text{akcje gracza A}} \left(\min_{b \in \text{akcje gracza B}} V(a,b) \right) = 1$$

$$v = \min_{b \in \text{akcje gracza B}} \left(\max_{a \in \text{akcje gracza A}} V(a,b) \right) = 1$$

	Broń zamek	Opuść zamek
Plądruj	1 / -1	2 / -2
Zaatakuj	0 / 0	3 / -3

Twierdzenie minimax

- Dla każdej dwuosobowej gry **o sumie zerowej** istnieje strategia dla każdego gracza, taka, że:
  a) biorąc pod uwagę strategię gracza drugiego, najlepszą możliwą spłatą dla gracza pierwszego jest v, i
  b) biorąc pod uwagę strategię gracza pierwszego, najlepszą możliwą spłatą dla gracza drugiego jest $-v$.

$$V = \max_a \min_b V(a,b) = \min_b \max_a V(a,b)$$

- Tę strategię nazywa się *strategią minimax*.
- **Uwaga:** To twierdzenie **nie** jest prawdziwe dla gier o sumie niezerowej!

John Von Neumann

- Twierdzenie minima udowodnił w 1928 roku przez Johna von Neumanna, nazywanego ojcem teorii gier.

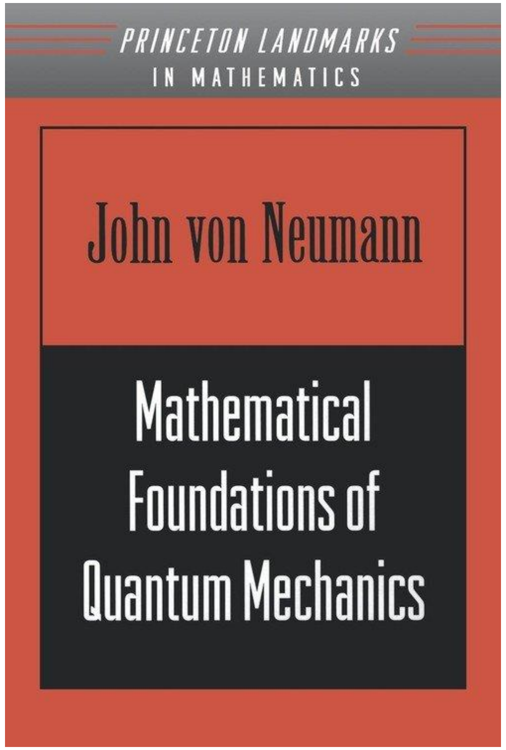
„Jak do tej pory widzę, nie mogłoby być żadnej teorii gier… bez tej teorii… Myślałem, że nic nie było warte publikowania, aż Teoria Minimax została udowodniona"

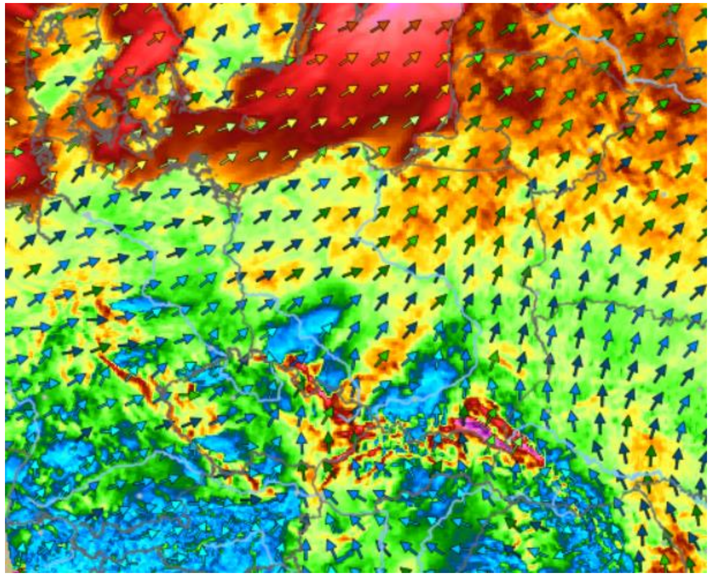
- *Teoria gier* stała się nowym działem matematyki dział, zajmującym się badaniem optymalnego doboru strategii zarówno w sytuacjach konfliktowych i kooperacyjnych.

John von Neumann
(1903 – 1957)

John Von Neumann

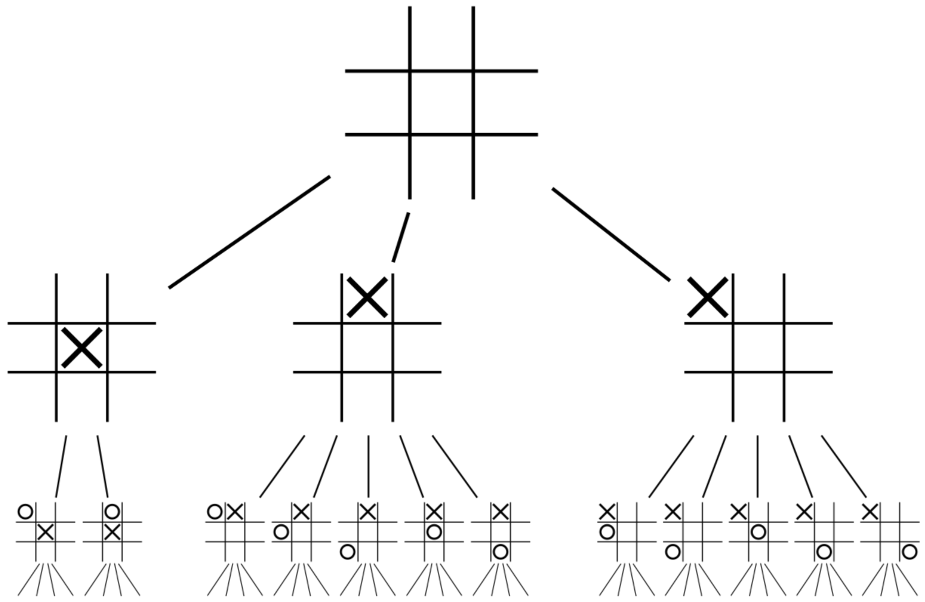
- John Von Neumann był także aktywny w innych obszarach nauki.



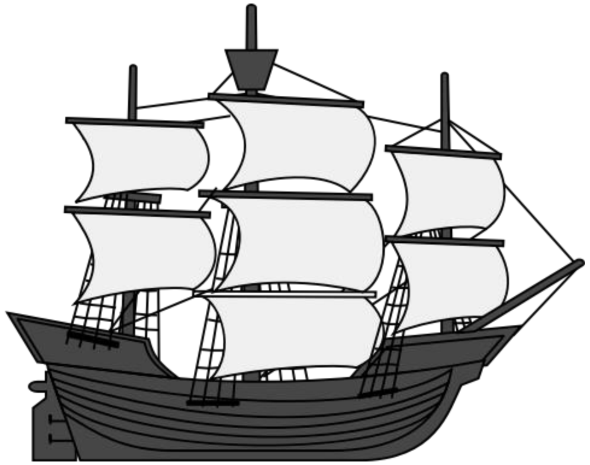


Gry w postaci ekstensywnej (gry sekwencyjne)

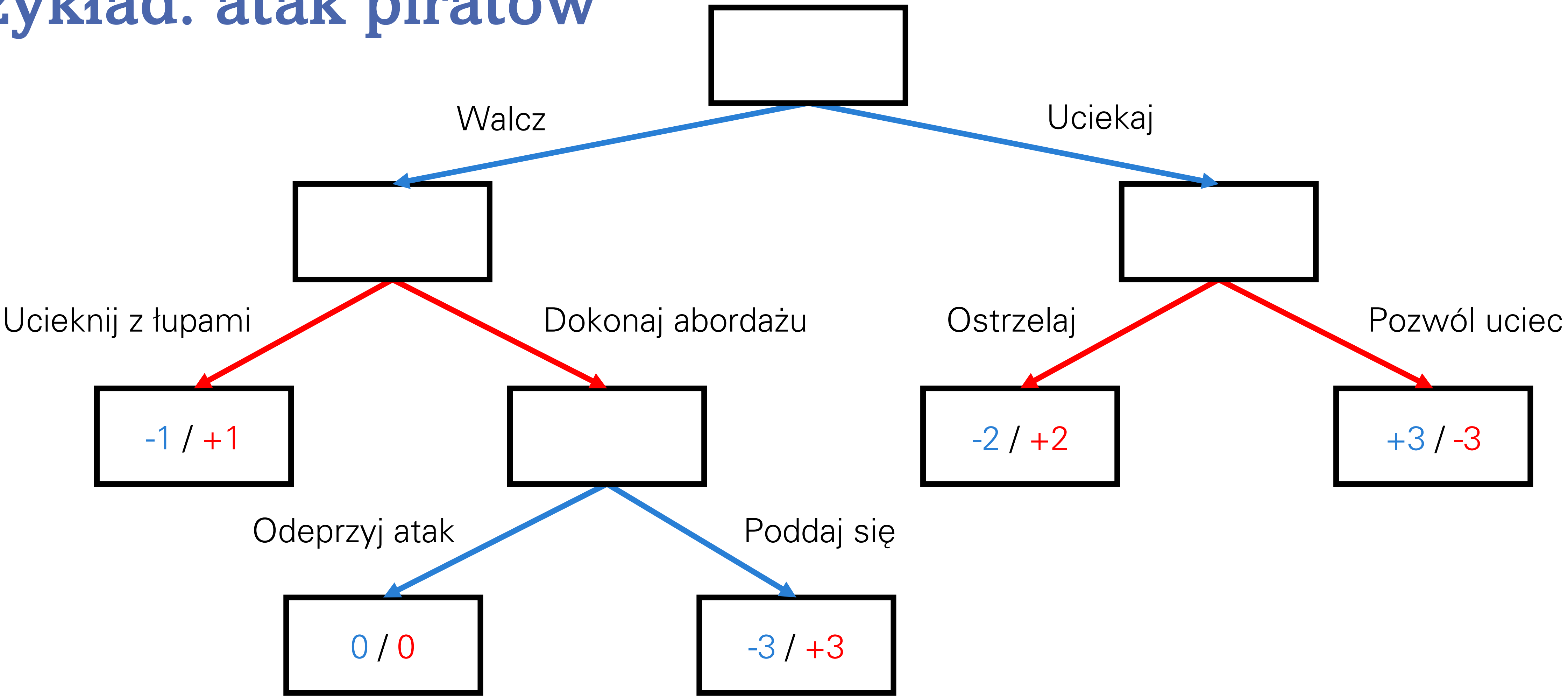
- W grach w postaci ekstensywnej ruchy są wykonywane przez graczy na zmianę.
- Możliwe strategie często przedstawia się za pomocą tzw. *drzewa gry*.



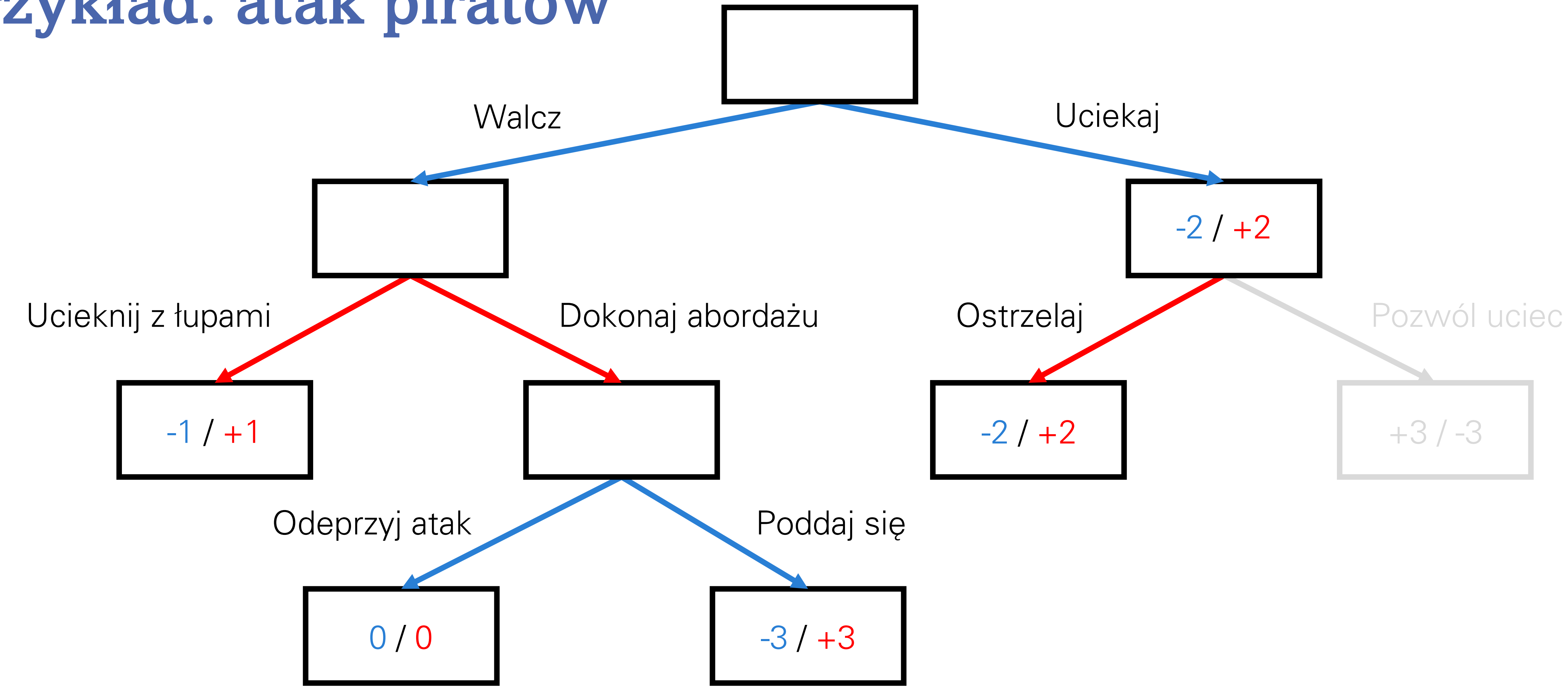
Przykład: atak piratów



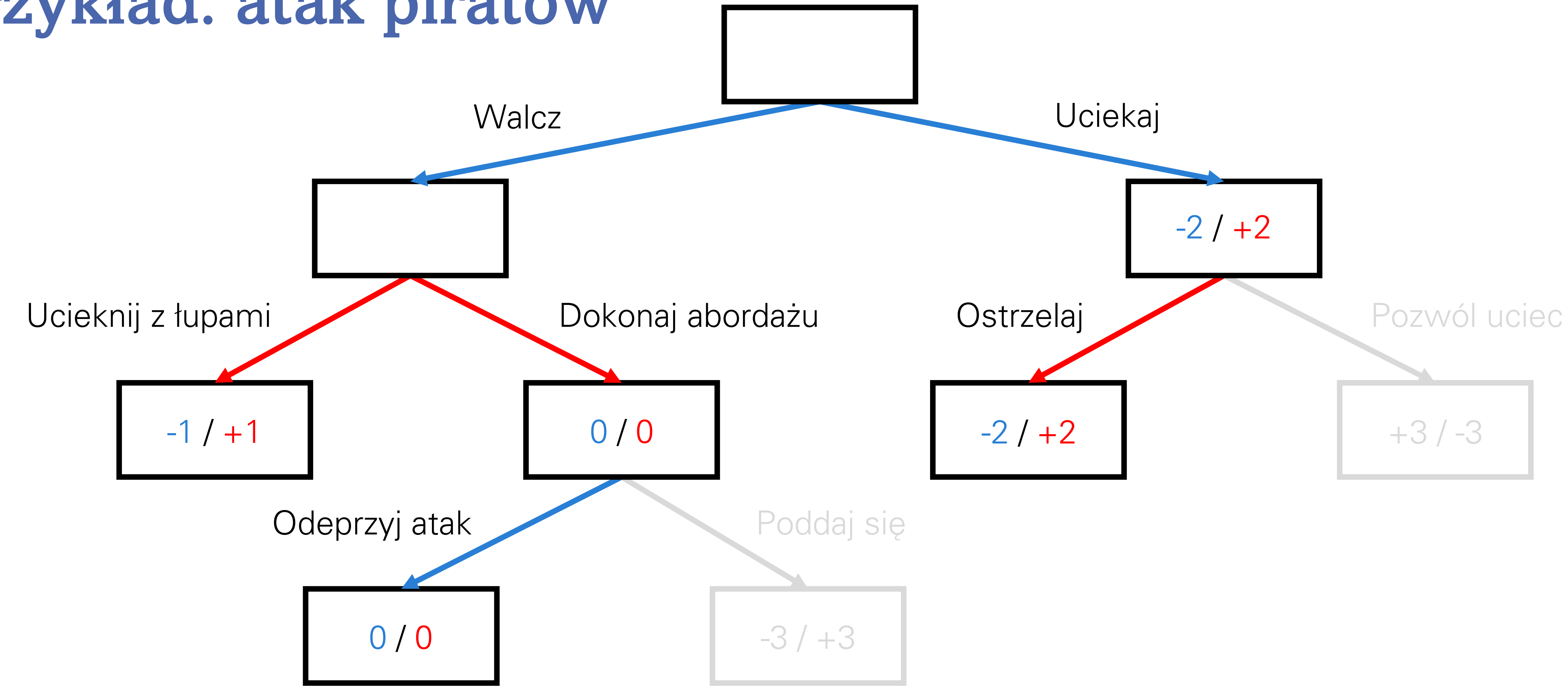
Przykład: atak piratów



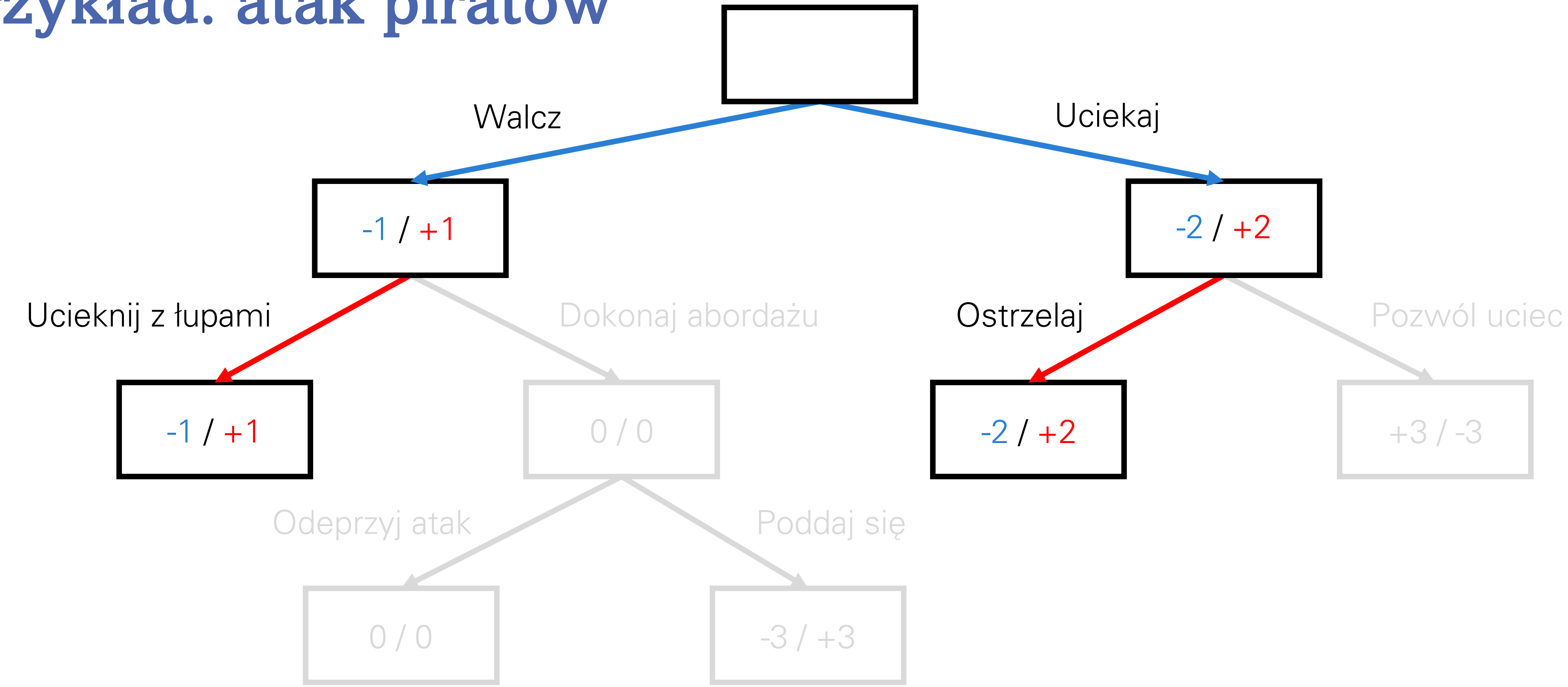
Przykład: atak piratów



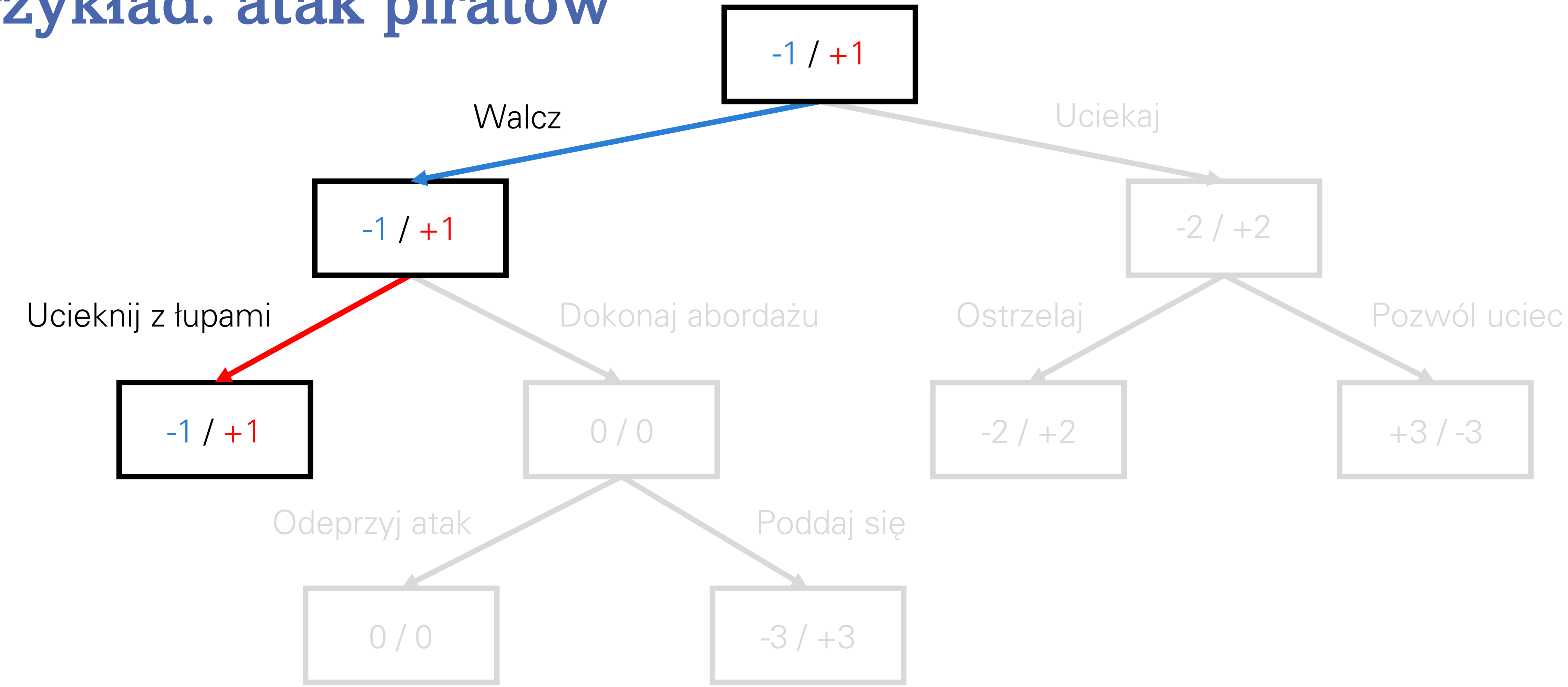
Przykład: atak piratów



Przykład: atak piratów

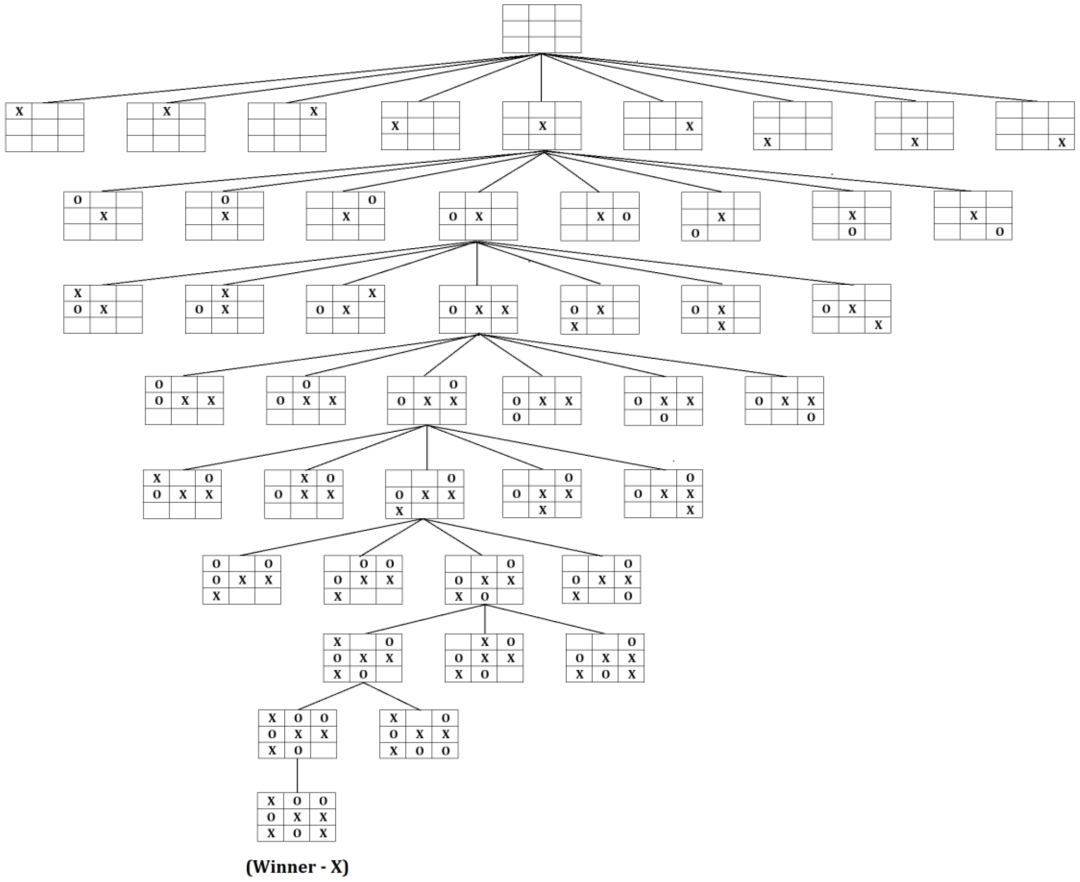


Przykład: atak piratów



Algorytm minimax

- Zastosowaliśmy tutaj tzw. *algorytm minimax*.
- Pozwala on znaleźć strategię minimax dla gier sekwencyjnych.
- Głównym problemem jest liczba możliwych scenariuszy, np. grę w kółko i krzyżyk można rozegrać na 255,168 sposobów!
- Podobne algorytmy można też zastosować do bardziej złożonych gier (np. *Monte Carlo Tree Search*).



Podsumowanie wykładu

- Teoria gier zajmuje się badaniem optymalnego wyboru strategii zarówno w sytuacjach konfliktowych i kooperacyjnych.
- Koniecznymi elementami gry są gracze, ich akcje oraz cel gry w postaci funkcji wypłaty.
- W przypadku **gier o sumie zerowej** optymalną strategią dla obu graczy jest strategia minimax.
- Na następnym wykładzie poszukamy optymalnych strategii w grach o sumie niezerowej.