Wykład 5. Błądzenie losowe w kasynie i na giełdzie

Piotr Morawiecki

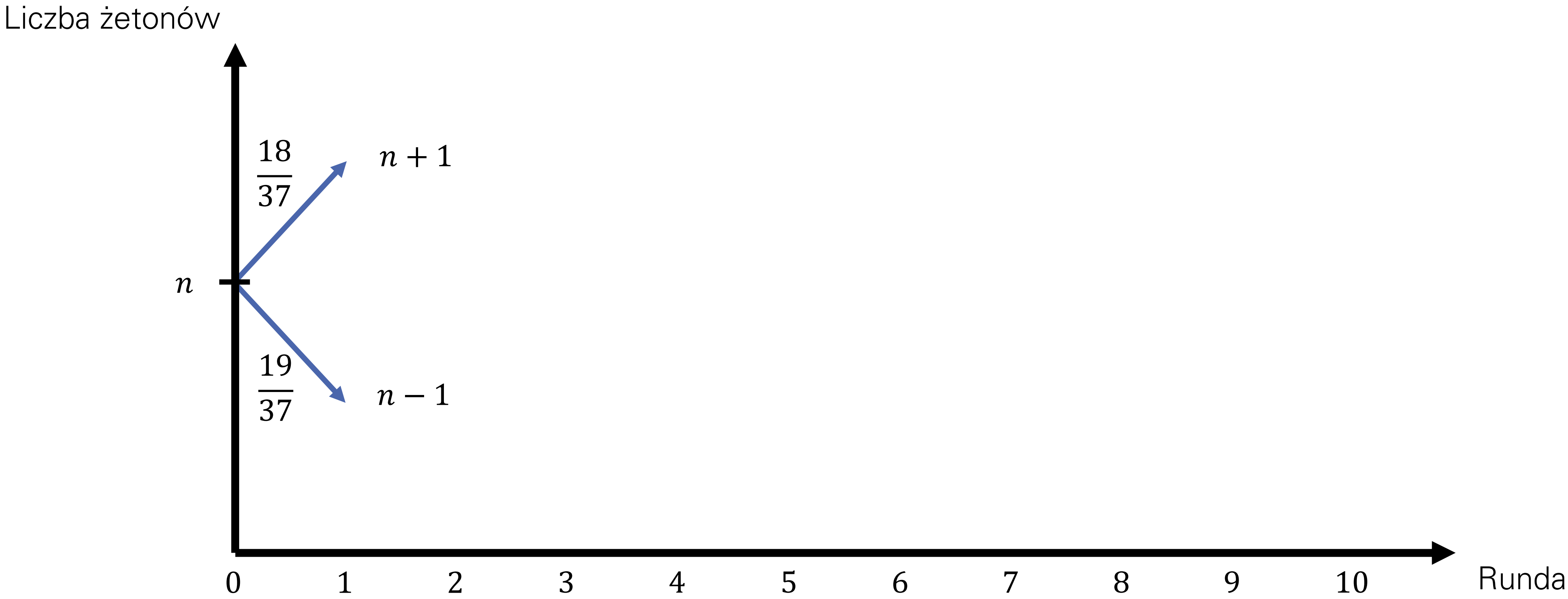
31 marca 2025

Motywacja: ruletka (1/2)

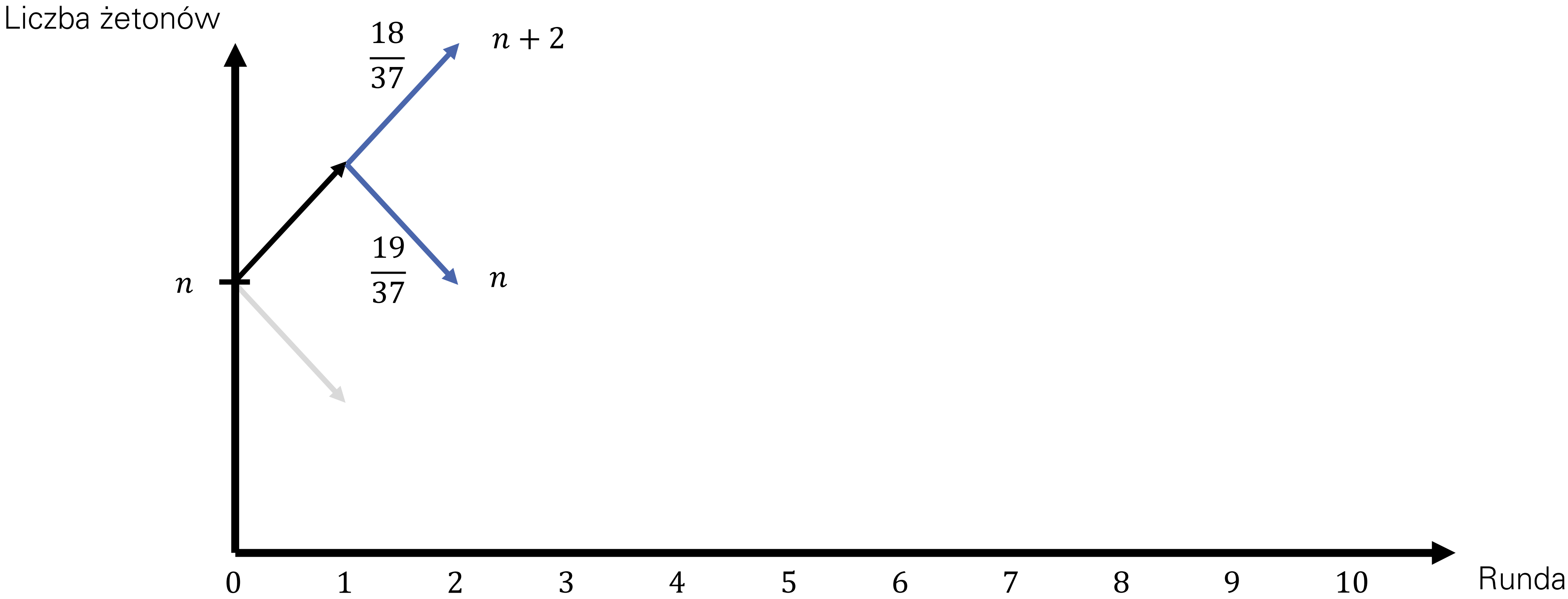
- Ruletka składa się z 37 pól:
  - 18 pól jest czerwonych,
  - 18 pól jest czarnych,
  - 1 pole jest zielone.
- Obstawiając na kolor czerwony w przypadku jeśli kulka wyląduje na polu czerwonym wygramy 1 żeton. W przeciwnym wypadku tracimy jeden żeton.
- Jaka jest wartość oczekiwana wyniku tej gry?

$$\frac{18}{37}\cdot(+1)+\frac{18}{37}\cdot(-1)+\frac{1}{37}\cdot(-1)=-\frac{1}{37}$$

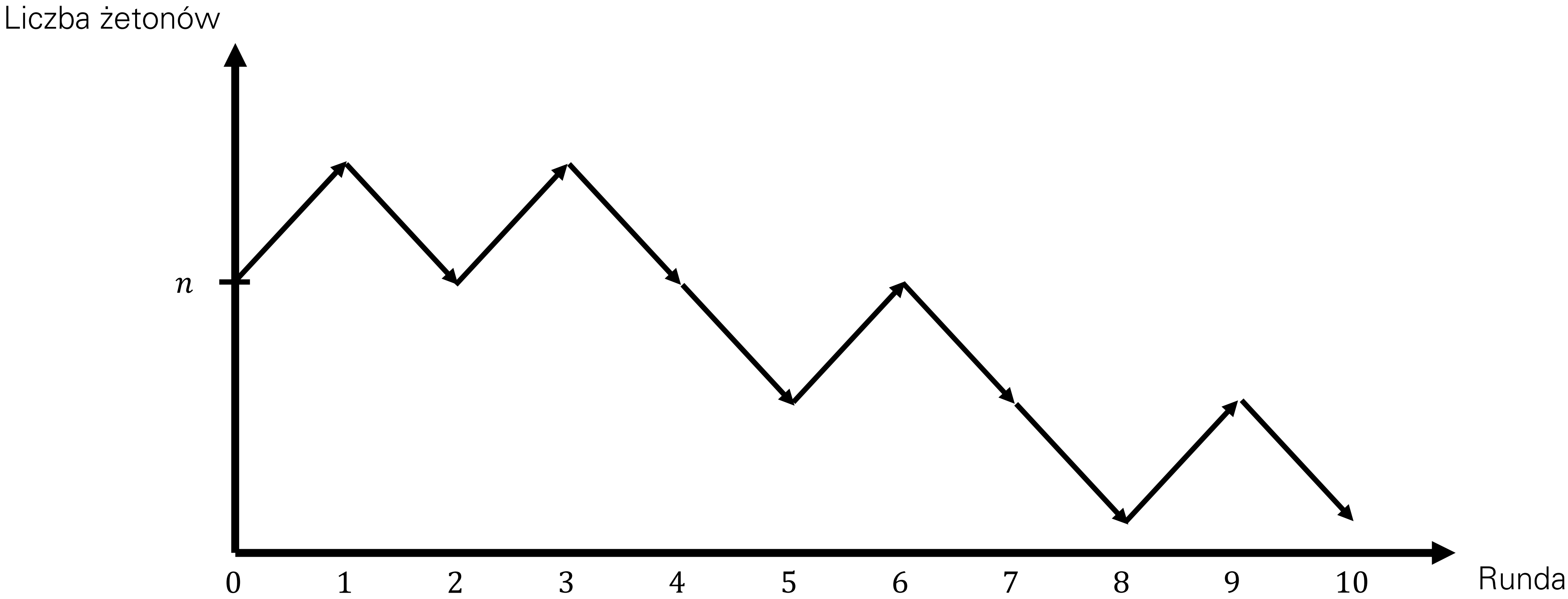
Motywacja: ruletka (2/2)



Motywacja: ruletka (2/2)

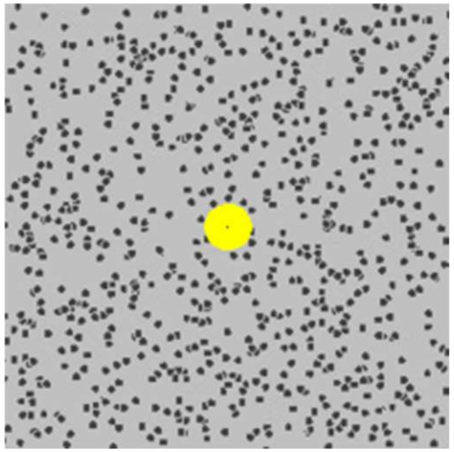


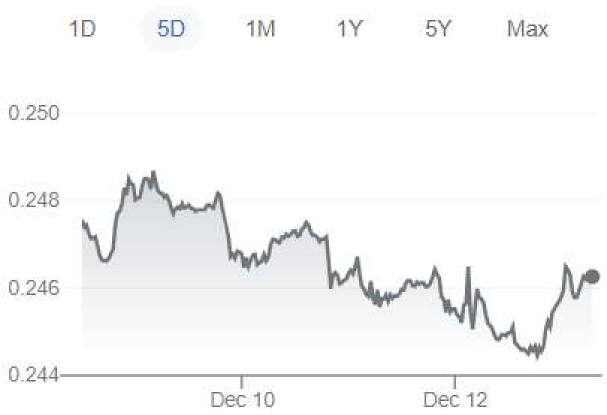
Motywacja: ruletka (2/2)



Błądzenie losowe

- Zmiana liczby żetonów jest przykładem tzw. *błądzenia losowego*.
- W błądzeniu losowym dana wielkość zmienia się losowo w każdym kroku według określonego rozkładu prawdopodobieństwa.
- Inne przykłady błądzenia losowego:





Symulacja błądzenia losowego (1/3)

Funkcja do symulowania błądzenia losowego

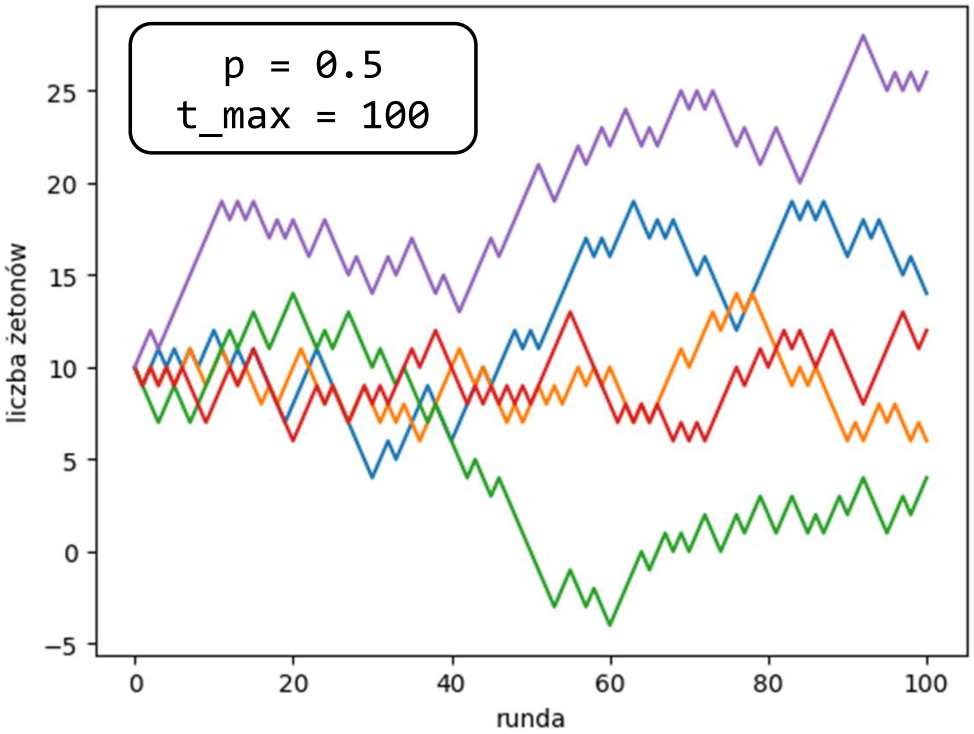
x0 – wartość początkowa
p – prawdopodobieństwo wzrostu
t_max – liczba kroków

```
import random                          # pakiet do generowania liczb losowych

def simulate(x0 = 10, p = 0.5, t_max = 100):

  x = [x0]                             # ustaw wartość początkową na x0

  for i in range(t_max):
    if random.random() < p:
      x.append(x[-1] + 1)              # z prawdopodbieństwem p zwiększ liczbę żetonów o 1
    else:
      x.append(x[-1] - 1)              # w przecinym razie zmniejsz liczbę żetonów o 1

  return x
```

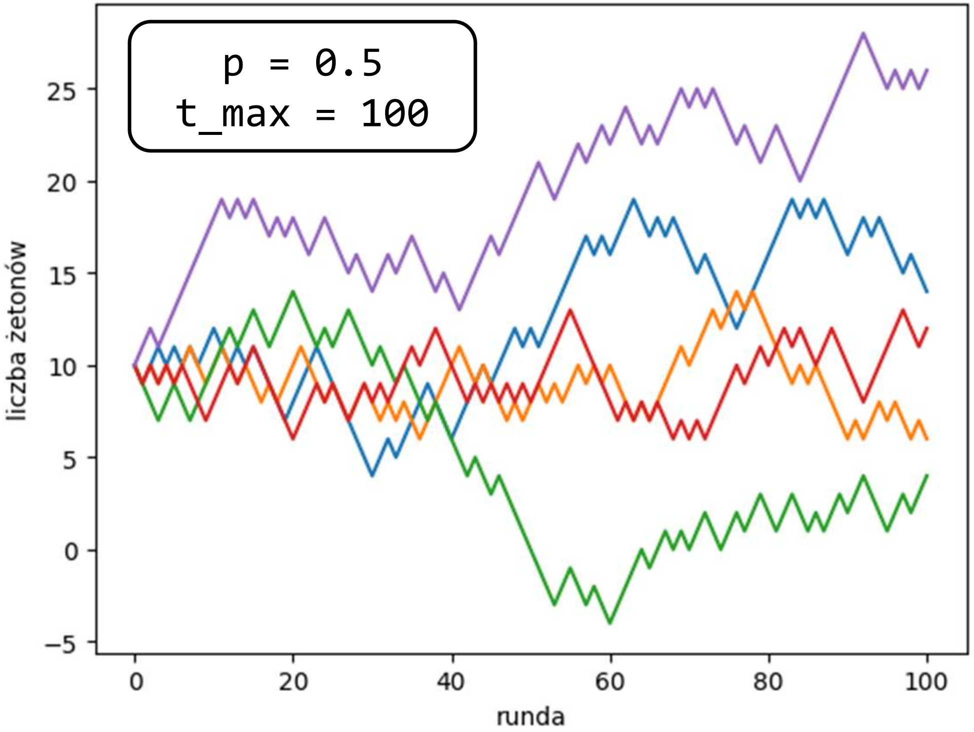
Program przedstawiający wyniki symulacji na wykresie

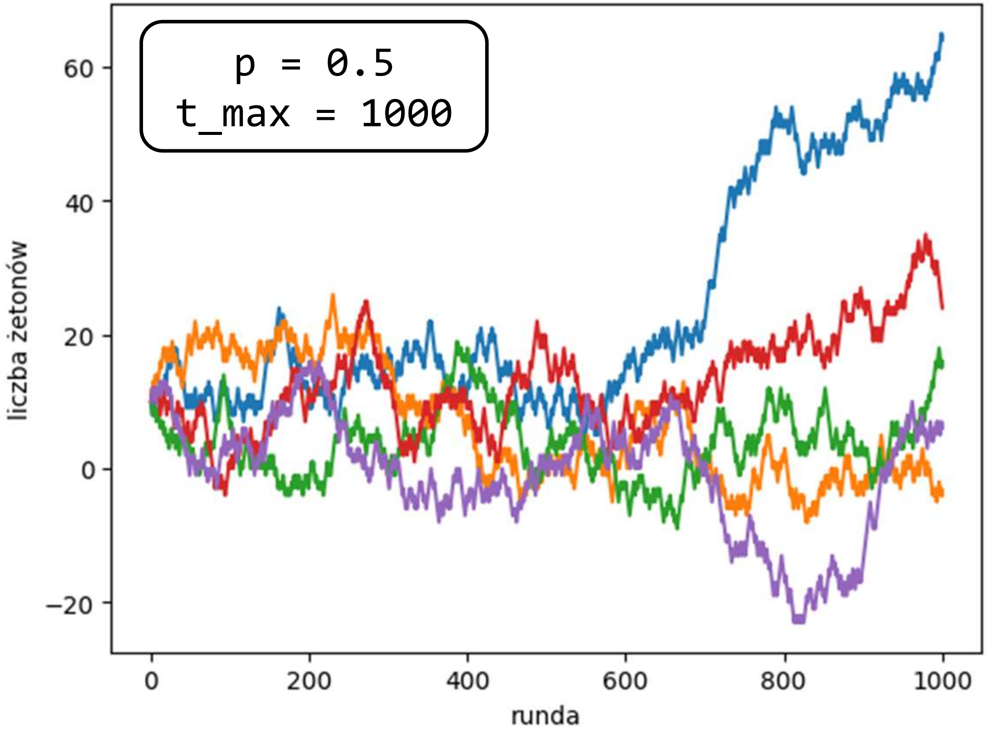
```
import matplotlib.pyplot as plt    # pakiet do rysowania wykresów

for i in range(5):                     # wykonaj 5 razy symulację błądzenia losowego
  plt.plot(simulate())                 # i przedstaw wyniki na wykresie

plt.ylabel("liczba żetonów")
plt.xlabel("runda")
plt.show()
```

Symulacja błądzenia losowego (2/3)

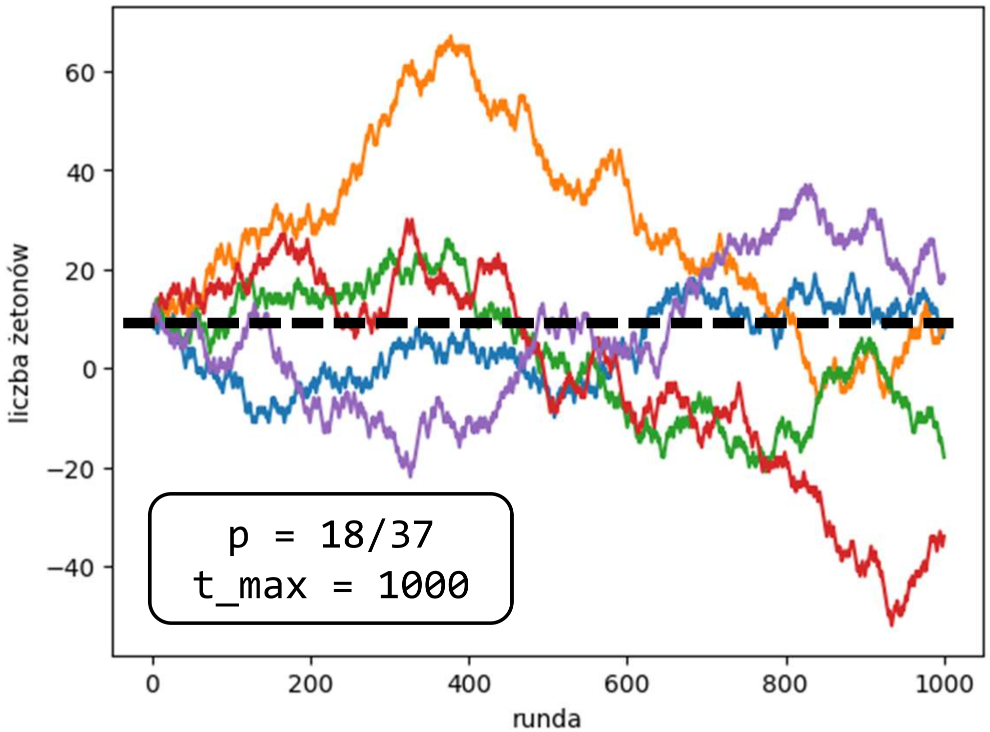


Symulacja błądzenia losowego (2/3)

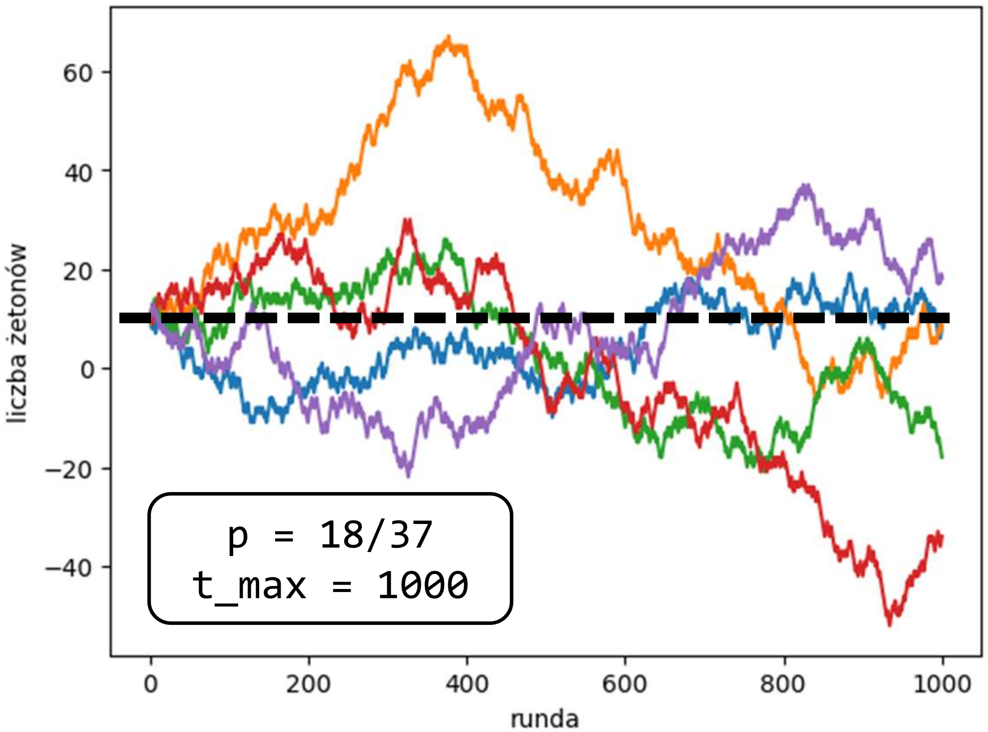


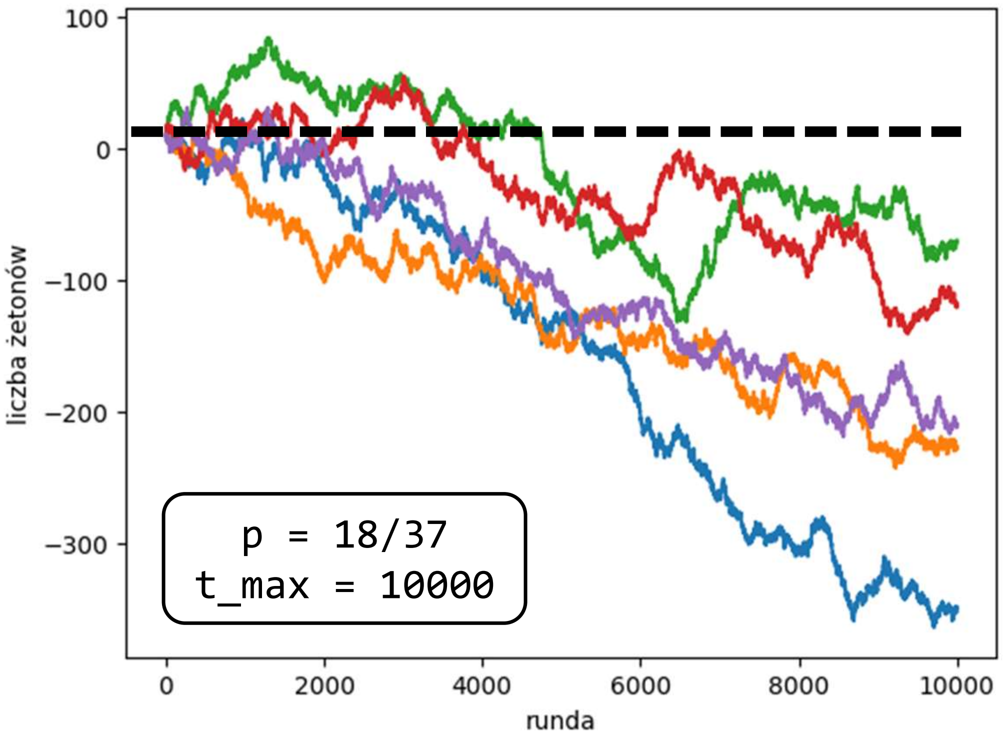


Symulacja błądzenia losowego (3/3)

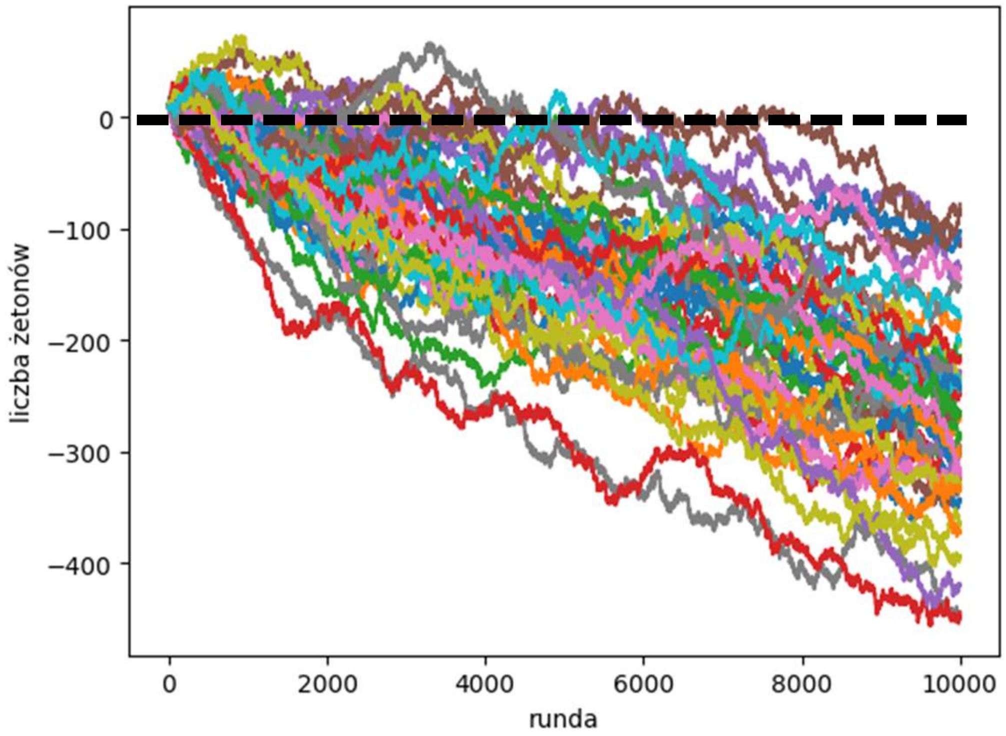


Symulacja błądzenia losowego (3/3)





Gambler’s ruin



Każdy gracz grający w grę o ujemnej wartości oczekiwanej w końcu zbankrutuje.

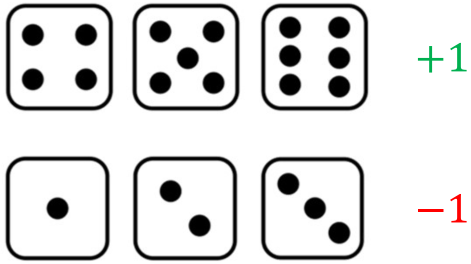
Zjawisko to jest znane jako *gambler's ruin*.

Case study: analiza ryzyka (1/7)

- Rozważamy następującą grę. Mamy 1 żeton. Rzucamy kością do gry.
  - Jeśli liczba oczek jest większa niż 3, to otrzymujemy jeden żeton.
  - Jeśli liczba oczek jest mniejsza lub równa 3, to tracimy jeden żeton.
- Jaka jest wartość oczekiwana w tej grze?

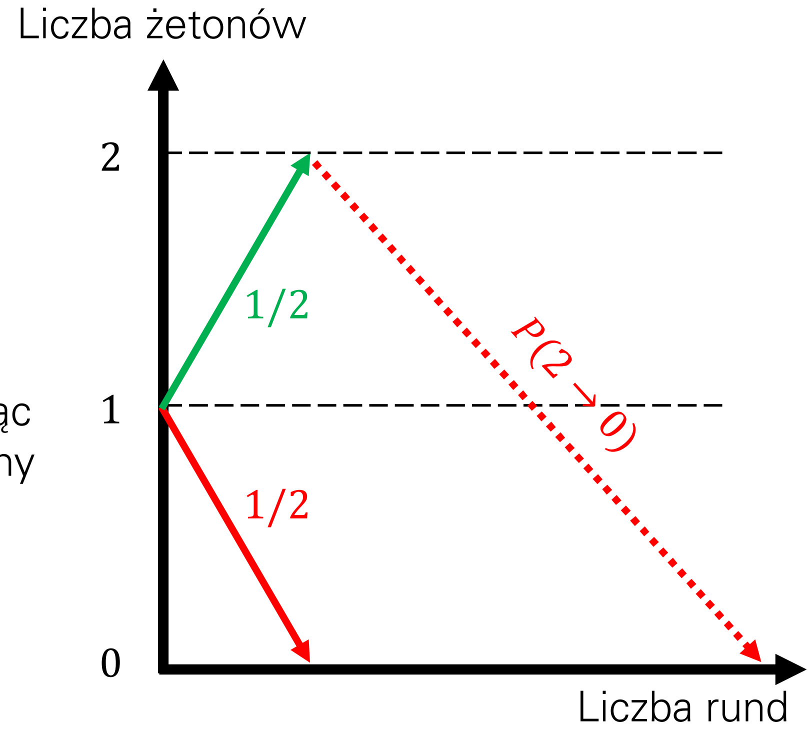
$$E(x) = \frac{3}{6} \cdot (+1) + \frac{3}{6} \cdot (-1) = 0$$

- Jakie jest prawdopodobieństwo, że grając w nieskończoność w końcu stracimy wszystkie żetony?



Case study: analiza ryzyka (2/7)

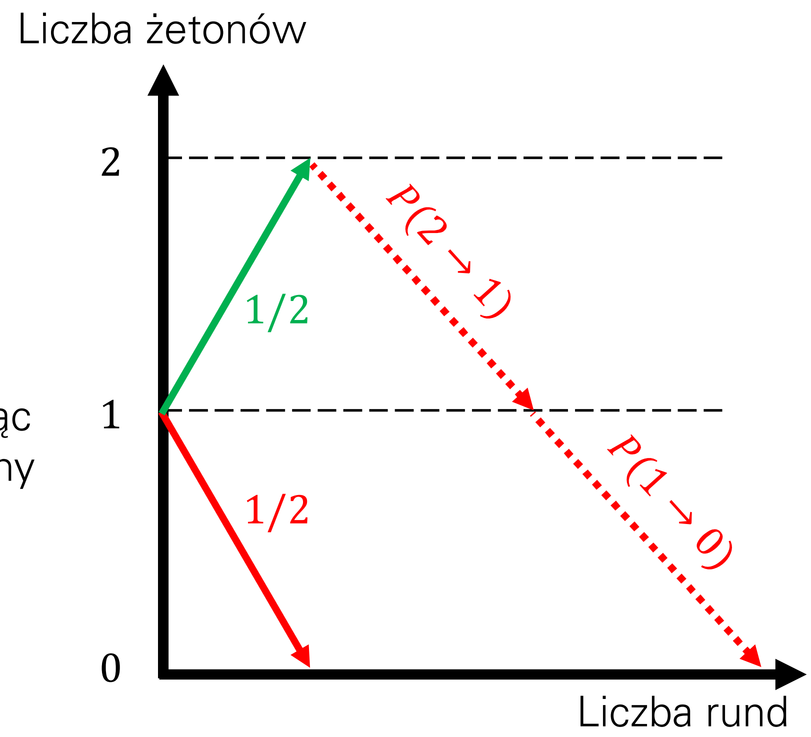
$$\underbrace{P(1 \to 0)}_{\substack{\text{prawdopodobieństwo, że mając} \\ \text{jeden żeton w końcu go stracimy}}} = \overbrace{\frac{1}{2}}^{\substack{\text{prawdopodobieństwo, że stracimy} \\ \text{go już w pierwszej rundzie}}} + \frac{1}{2} \cdot \underbrace{P(2 \to 0)}_{\substack{\text{prawdopodobieństwo, że mając} \\ \text{dwa żetony w końcu je stracimy}}}$$



Case study: analiza ryzyka (2/7)

$$\underbrace{P(1 \rightarrow 0)}_{\text{prawdopodobieństwo, że mając jeden żeton w końcu go stracimy}} = \overbrace{\frac{1}{2}}^{\text{prawdopodobieństwo, że stracimy go już w pierwszej rundzie}} + \frac{1}{2} \cdot \underbrace{P(2 \rightarrow 0)}_{\text{prawdopodobieństwo, że mając dwa żetony w końcu je stracimy}}$$

$$\overbrace{P(2 \rightarrow 0)} = \underbrace{P(2 \rightarrow 1)}_{\text{prawdopodobieństwo, że w końcu stracimy przedostatni żeton}} \cdot \underbrace{P(1 \rightarrow 0)}_{\text{prawdopodobieństwo, że w końcu stracimy ostatni żeton}}$$

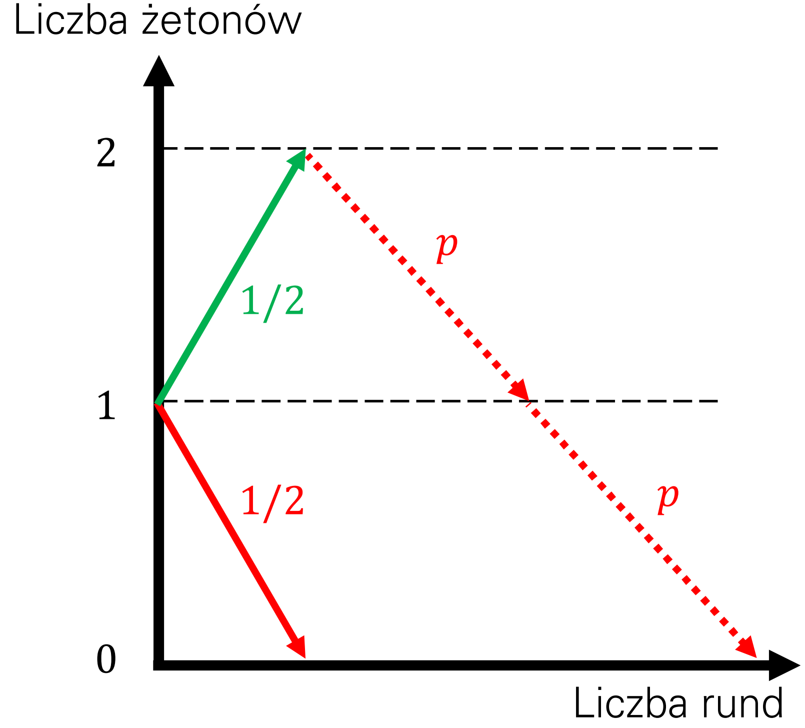


Case study: analiza ryzyka (2/7)

$$\underbrace{P(1 \to 0)}_{p} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \underbrace{P(2 \to 0)}_{p^2}$$

$$\underbrace{P(2 \to 0)}_{p^2} = \underbrace{P(2 \to 1)}_{p} \cdot \underbrace{P(1 \to 0)}_{p}$$

$$\boxed{p = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} p^2}$$



Case study: analiza ryzyka (3/7)

$$p = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}p^2$$

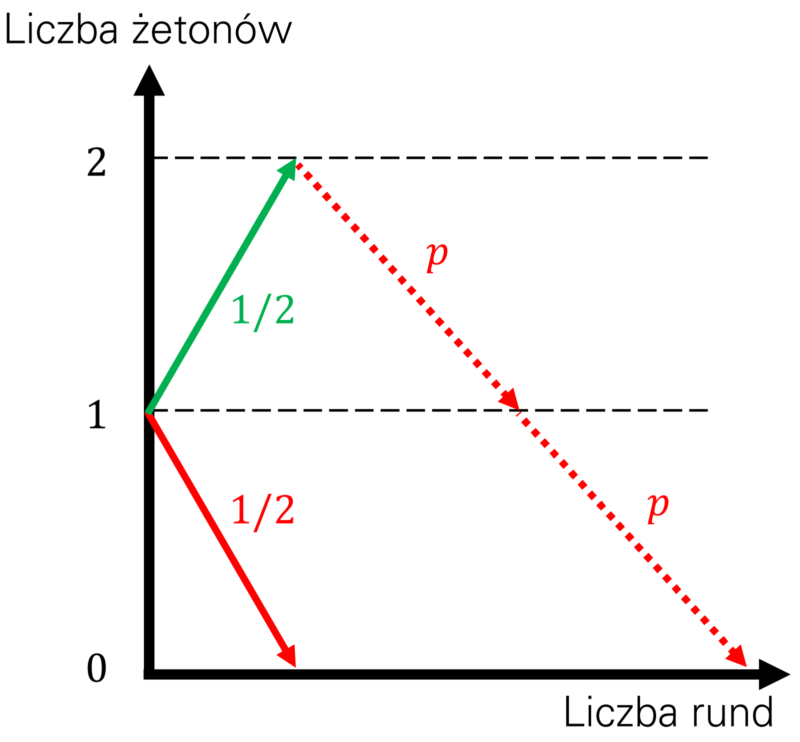
$$2p = 1 + p^2$$

$$p^2 - 2p + 1 = 0$$

$$(p-1)^2 = 0$$

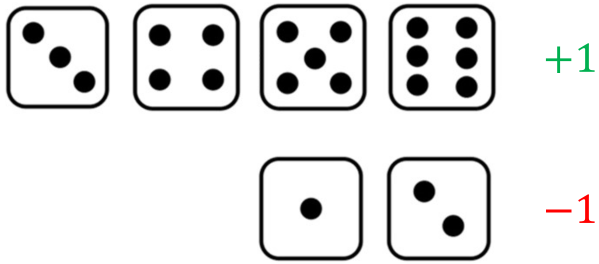
$$p = 1$$

Zatem prawdopodobieństwo, że w końcu stracimy wszystkie żetony wynosi $p = 1$.



Case study: analiza ryzyka (4/7)

- Rozważmy grę, w której również rzucamy kością.
  - Jeśli liczba oczek jest większa lub równa 3, to otrzymujemy jeden żeton.
  - Jeśli liczba oczek jest mniejsza niż 3, to tracimy jeden żeton.



- Jaka jest wartość oczekiwana w tej grze?

$$E(x) = \frac{4}{6} \cdot (+1) + \frac{2}{6} \cdot (-1) = \frac{1}{3}$$

- Jakie jest prawdopodobieństwo, że grając w nieskończoność w końcu stracimy wszystkie żetony?

a) Również 100%

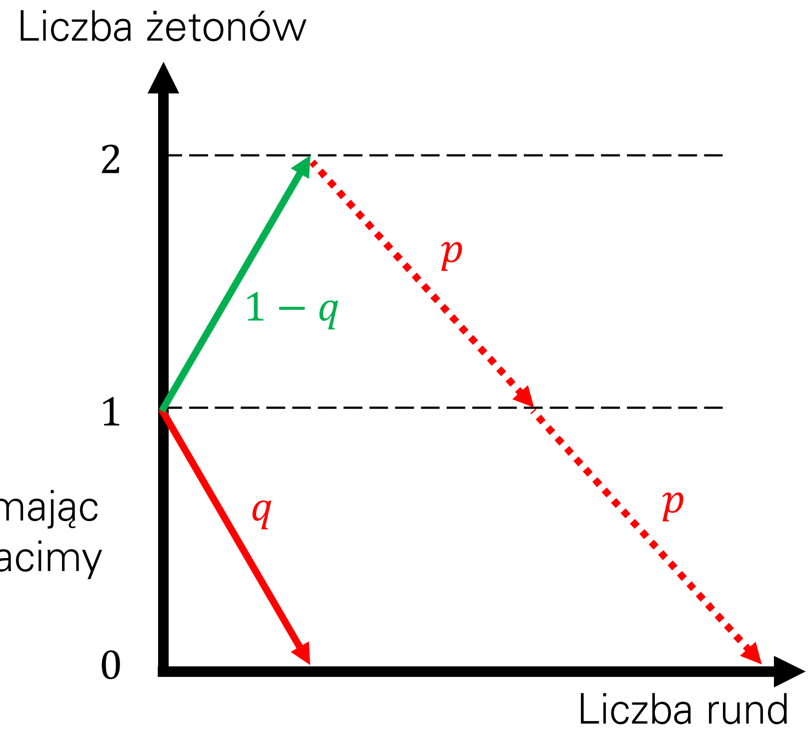
b) Mniej niż 100%

Case study: analiza ryzyka (5/7)

- Oznaczmy prawdopodobieństwo stracenia żetonu podczas rzutu jako $q = \frac{1}{3}$.

$$\underbrace{P(1 \to 0)}_{\substack{\text{Prawdopodobieństwo } p\text{, że mając} \\ \text{jeden żeton w końcu go stracimy}}} = \overbrace{q}^{\substack{\text{prawdopodobieństwo, że stracimy} \\ \text{go już w pierwszej rundzie}}} + (1-q) \cdot \underbrace{P(2 \to 0)}_{\substack{\text{prawdopodobieństwo, że mając} \\ \text{dwa żetony w końcu je stracimy}}}$$

$$\boxed{p = q + (1-q)p^2}$$



Case study: analiza ryzyka (6/7)

$$\boxed{p = q + (1-q)p^2}$$

$$(1-q)\cdot p^2 - p + q = 0$$

$$p^2 - \frac{p}{1-q} + \frac{q}{1-q} = 0$$

Jednym z rozwiązań jest zawsze $p = 1$

$$q + (1-q)\cdot 1 = 1$$

$$(p-1)\cdot(p-x) = 0$$

Szukamy x, takiego że:

$$(p-1)\cdot(p-x) = p^2 - \frac{p}{1-q} + \frac{q}{1-q}$$

$$p^2 - p - xp + x = p^2 - \frac{p}{1-q} + \frac{q}{1-q}$$

Żeby wyraz czerwony był ten sam: $x = \frac{q}{1-q}$

Czy wyraz niebieski wychodzi ten sam?

$$-p\left(1 - \frac{q}{1-q}\right) = -p\left(\frac{1-q}{1-q} - \frac{q}{1-q}\right) = -\frac{p}{1-q}$$

✓

Case study: analiza ryzyka (7/7)

$$p = q + (1-q) \cdot p^2 \quad \Rightarrow \quad (p-1) \cdot \left(p - \frac{q}{1-q}\right) = 0$$

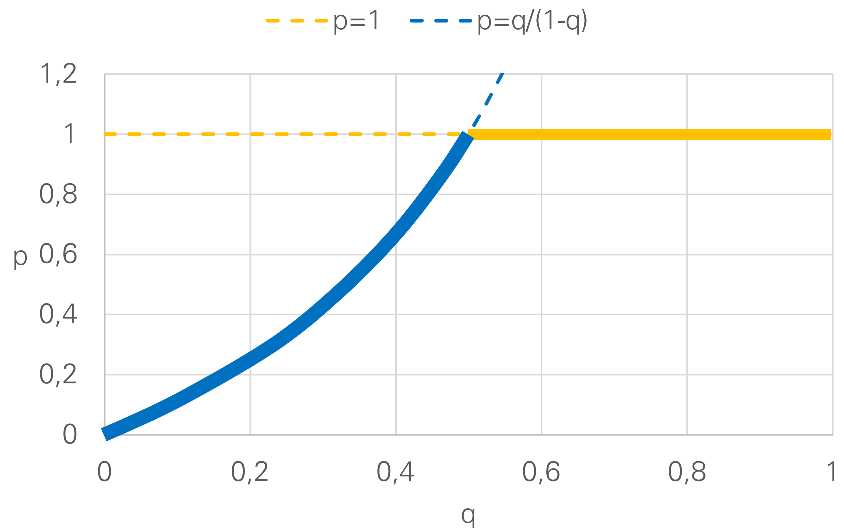
Dwa możliwe rozwiązania:

$$p = 1 \qquad \text{lub} \qquad p = \frac{q}{1-q}$$

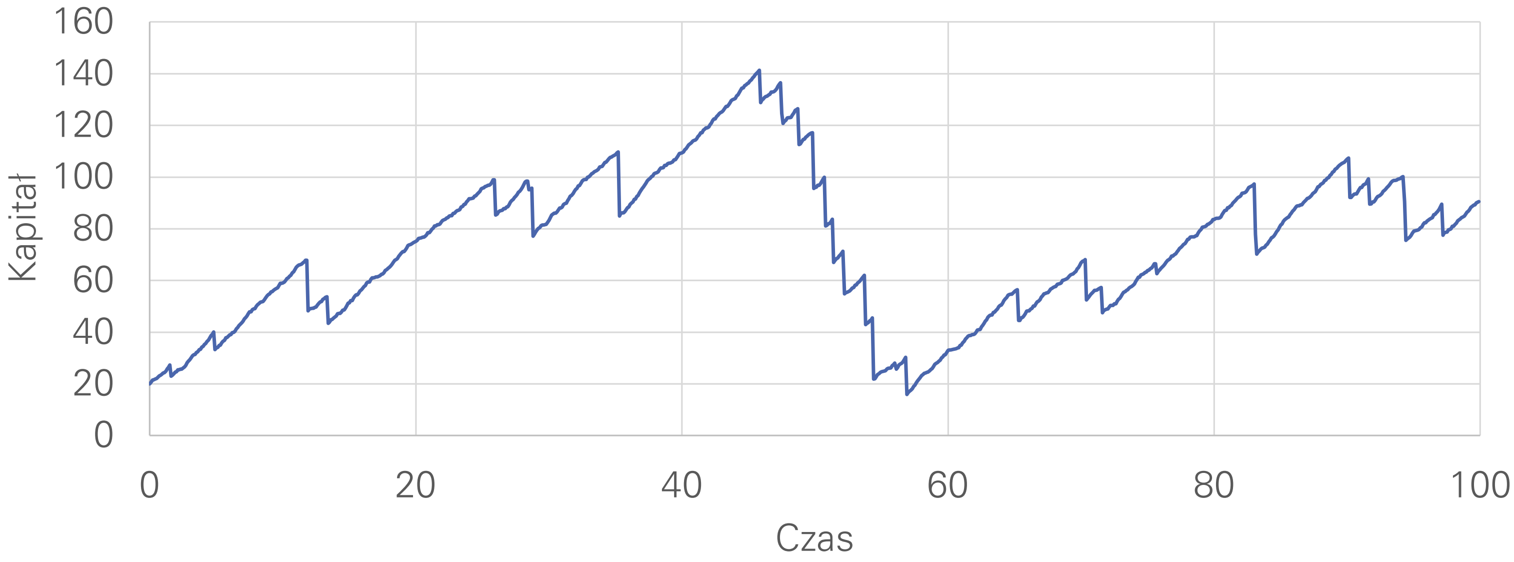
Dla $q = \frac{1}{3}$: $\quad p = \frac{q}{1-q} = \frac{1}{2}$

Zatem szansa, że zaczynając z jednym żetonem w końcu go stracimy, wynosi 50%.

Jaka jest szansa, że zbankrutujemy zaczynając grę z dwoma żetonami? $\quad p^2 = \frac{1}{4}$



Zastosowanie: Firmy ubezpieczeniowe



- Jakie jest prawdopodobieństwo, że firma upadnie?
- Jaki powinien być kapitał startowy, żeby ryzyko upadku było mniejsze niż 1%?

Podsumowanie wykładu

- Błądzenie losowe opisuje losową zmiany pewnej wielkości (np. liczby żetonów w grze lub kapitału firmy) w czasie.
- Błądzenie losowe to praktyczne zastosowania w wielu różnych dyscyplinach.
- Nauczyliśmy się analizować błądzenie losowe z wykorzystaniem symulacji komputerowych i narzędzi analitycznych.
- Pokazaliśmy jak obliczyć prawdopodobieństwo stracenia wszystkich punktów w grach losowych.

Kurs dolara amerykańskiego (USD)