Łamigłówka na rozgrzewkę

Na stole znajduje się 100 monet – 10 orłem do góry, a pozostałe 90 reszką.

W pomieszczeniu jest całkowicie ciemno i nie masz możliwości rozpoznać, na której stronie znajduje się każda z monet.

Jak możesz rozłożyć monety na dwa stosy tak, żeby na każdym stosie była taka sama liczba orłów?

10 × 

90 × 

Wykład 3. Wartość oczekiwana i Prawo Wielkich Liczb

Piotr Morawiecki
17 marca 2025

Motywacja

- Rzucamy następującą grę:

Rzucamy monetą. Jeśli wypadnie orzeł wygramy 5 złotych,
a jeśli wypadnie reszka tracimy 4 złote.

$+5$

-4

- Jaka będzie nasza wygrana po 10 rzutach monetą?

Motywacja

$+5$

-4

- Jaka będzie nasza wygrana po 10 rzutach monetą? *Nie wiadomo* :)
- Największy wynik wynosi $10 \cdot (+5) = 50$
- Najmniejszy wynik wynosi $10 \cdot (-4) = -40$
- Statystycznie 5 razy wypadnie orzeł i 5 razy reszka. Wówczas nasza wygrana wyniesie:
$$5 \cdot (+5) + 5 \cdot (-4) = 25 - 20 = +5$$
- Co oznacza, że po każdym rzucie monetą nasz zysk wynosi średnio
$$\frac{+5}{10} = +0.5$$
- Jest to tzw. *wartość oczekiwana*.

Wartość oczekiwana

- Rozważmy doświadczenie losowe, którego możliwym wynikom przyporządkowujemy wartość liczbową.
- *Wartością oczekiwaną* tego doświadczenia określa się średnią wartość, jakiej możemy się spodziewać po wykonaniu bardzo dużej liczby jego powtórzeń.
- Oznaczmy możliwe wyniki doświadczenia X jako x_1, x_2, …, x_n, a prawdopodobieństwo ich zajścia jako $P(X = x_1)$, $P(X = x_2)$, …, $P(X = x_n)$.
- Wartość oczekiwaną wyniku X oznacza się jako $E(X)$. Obliczamy ją sumując wszystkie możliwe wyniki, każdy pomnożony przez prawdopodobieństwo jego wystąpienia:

$$E(X) = P(X = x_1) \cdot x_1 + P(X = x_2) \cdot x_2 + \cdots + P(X = x_n) \cdot x_n$$

Przykład 1.

- Wartość oczekiwaną wyniku X oznacza się jako $E(X)$. Obliczamy ją sumując wszystkie możliwe wyniki, każdy pomnożony przez prawdopodobieństwo jego wystąpienia:

$$E(X) = P(X = x_1) \cdot x_1 + P(X = x_2) \cdot x_2 + \cdots + P(X = x_n) \cdot x_n$$

- W poprzedniej grze:

$$E(X) = P(\text{orzeł}) \cdot (+5) + P(\text{reszka}) \cdot (-4)$$

$$E(X) = \frac{1}{2} \cdot (+5) + \frac{1}{2} \cdot (-4) = \frac{5}{2} - \frac{4}{2} = +0.5$$

(Tak jak wyszło nam na początku)

$+5$

-4

Przykład 2.

- Znajdźmy wartość oczekiwaną liczby oczek podczas rzutu sześcienną kostką do gry.

 $\rightarrow 1$  $\rightarrow 2$  $\rightarrow 3$  $\rightarrow 4$  $\rightarrow 5$  $\rightarrow 6$

- Wartość oczekiwana wynosi:

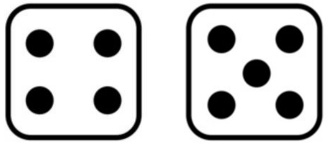
$$E(X) = P(x=1)\cdot 1 + P(x=2)\cdot 2 + P(x=3)\cdot 3 + P(x=4)\cdot 4 + P(x=5)\cdot 5 + P(x=6)\cdot 6$$

$$E(X) = \frac{1}{6}\cdot 1 + \frac{1}{6}\cdot 2 + \frac{1}{6}\cdot 3 + \frac{1}{6}\cdot 4 + \frac{1}{6}\cdot 5 + \frac{1}{6}\cdot 6 = \frac{21}{6} = 3.5$$

- Średnio w każdej grze powinniśmy dostać 3.5 oczek na kostce.

Przykład 3.

- Rzucamy kością. Jeśli wypadną mniej niż 4 oczka to tracimy 2 punkty, jeśli wypadnie 4 lub 5 oczek to zdobywamy 1 punkt, a jeśli wypadnie 6 oczek to zdobywamy 5 punktów.

 $\to -2$  $\to +1$  $\to 5$

- Wartość oczekiwana wynosi:

$$E(X) = P(x=-2)\cdot(-2) + P(x=1)\cdot(+1) + P(x=5)\cdot(+5)$$

$$E(X) = \frac{3}{6}\cdot(-2) + \frac{2}{6}\cdot(+1) + \frac{1}{6}\cdot(+5) = -\frac{6}{6} + \frac{2}{6} + \frac{5}{6} = +\frac{1}{6}$$

- Średnio w każdej grze powinniśmy zyskać $+1/6$ punkta.

Jak eksperymentalnie wyznaczyć wartość oczekiwaną?

Żeby określić wartość oczekiwaną możemy wykonać doświadczenie wielokrotnie (np. rzut kością), a następnie wyciągnąć średnią z jego wyników (np. liczby wyrzuconych oczek).

1 rzut kością:	4	1	3	2	5	← Duży rozrzut wyników
Średnia z 10 rzutów kością:	4.1	3.3	3.6	3.0	3.2	
Średnia z 100 rzutów kością:	3.59	3.43	3.43	3.56	3.16	
Średnia z 1000 rzutów kością:	3.53	3.53	3.44	3.51	3.41	← Wartość bardzo zbliżona do wartości oczekiwanej

Prawo Wielkich Liczb

Jacob Bernoulli (1655 – 1705)

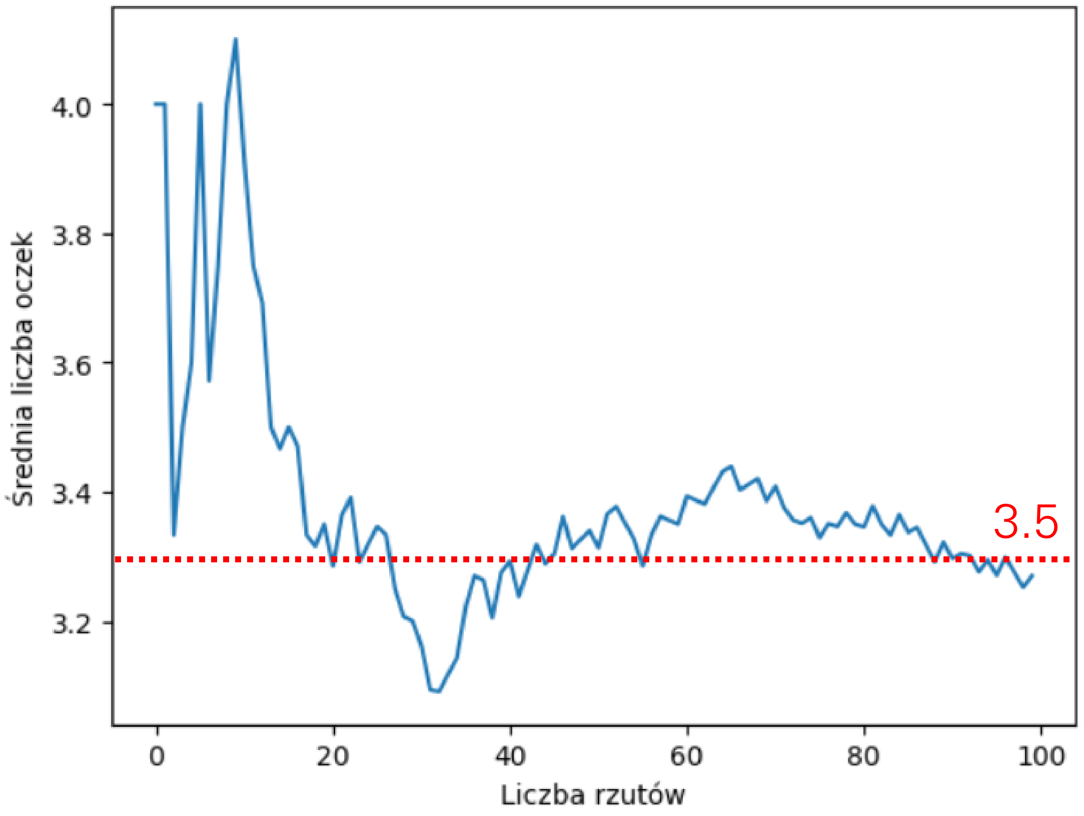
Zgodnie z tzw. *Prawem Wielkich Liczb*, gdy liczba prób losowego doświadczenia dąży do nieskończoności, średnia arytmetyczna wyników tych prób dąży do ich wartości oczekiwanej.

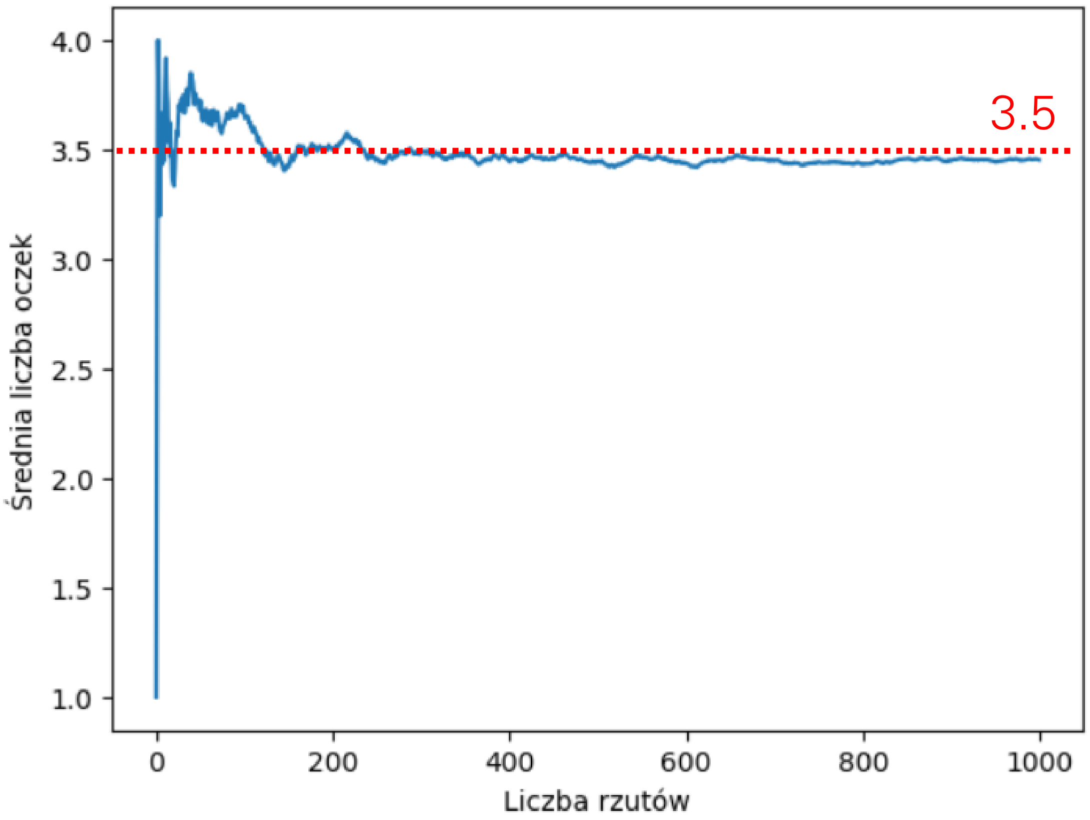
Testujemy Prawo Wielkich Liczb (1/3)

- Napiszmy program w Pythonie do symulowania rzutów kością:

```
import random                         # pakiet do generowania liczb losowych
import matplotlib.pyplot as plt    # pakiet do rysowania wykresów

results = []     # lista do zapisywania wyników rzutów kością
average = []     # lista do zapisywania średniej liczby oczek

# Rzucamy kością 100 razy za każdym razem obliczając średnią z dotychczasowych rzutów
for i in range(100):
  results.append(random.randint(1, 6))
  average.append(sum(results) / len(results))

# Przestawiamy zmianę średniej na wykresie
plt.plot(average)
plt.xlabel('Liczba rzutów')
plt.ylabel('Średnia liczba oczek')
plt.show()
```

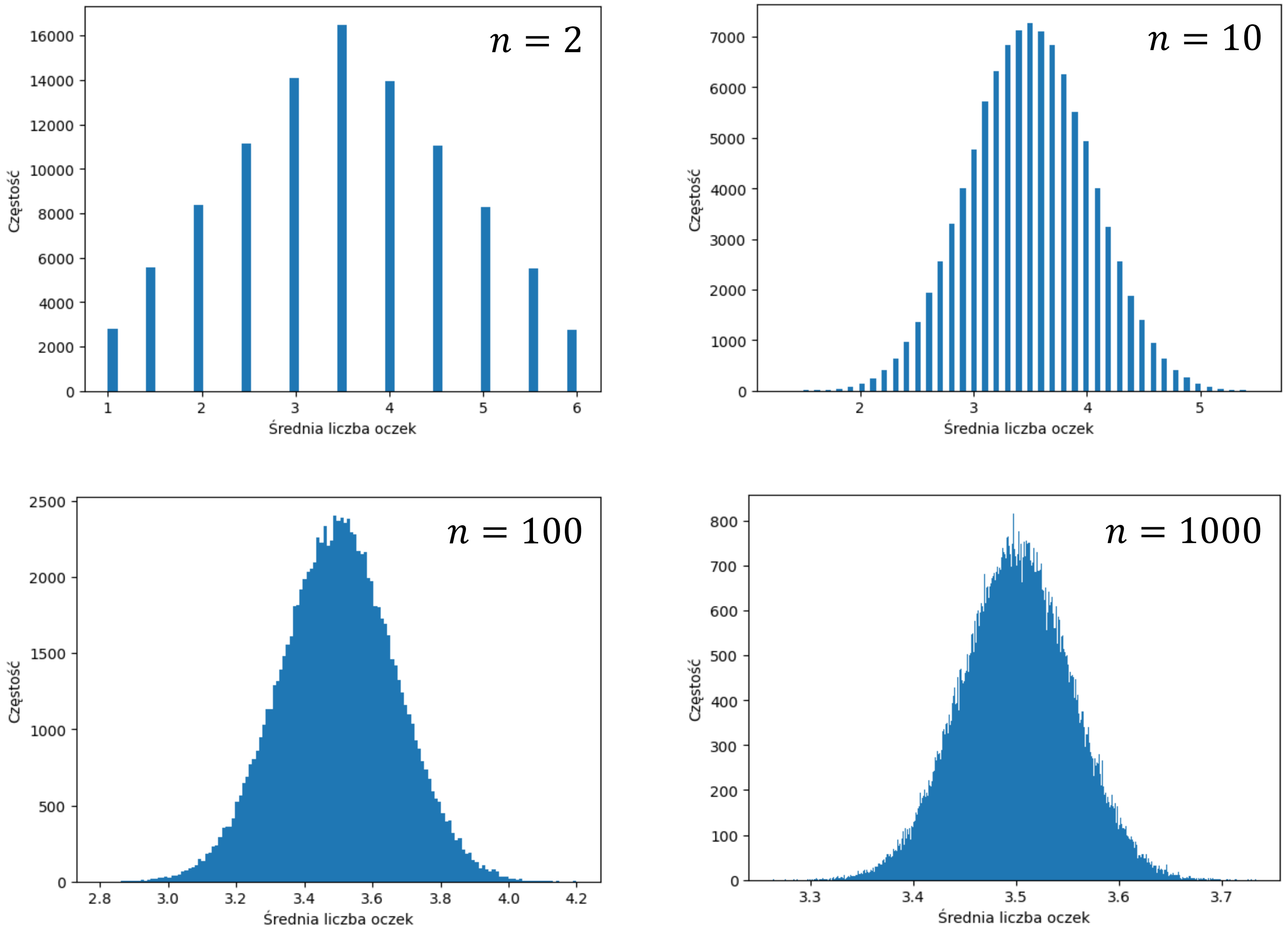
Testujemy Prawo Wielkich Liczb (2/3)





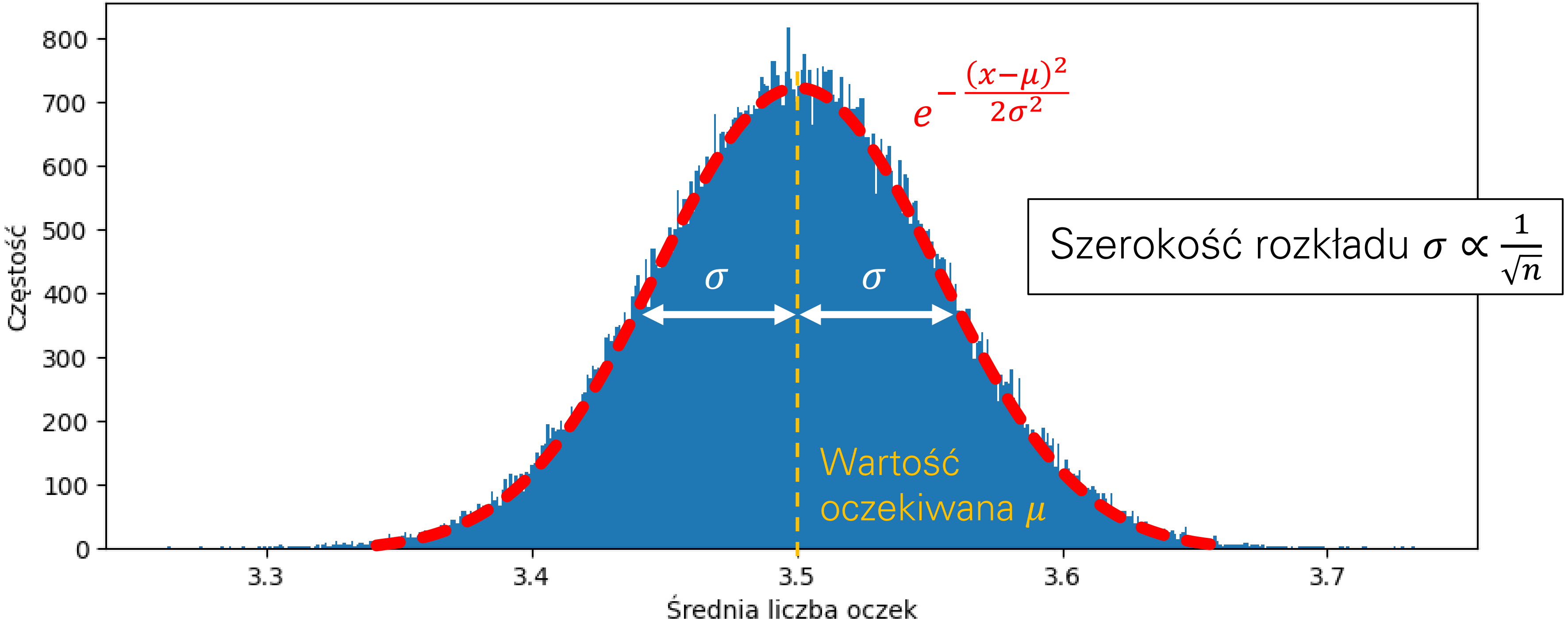
Testujemy Prawo Wielkich Liczb (3/3)

```
# Funkcja symuluje n rzutów kością, a następnie zwraca średnią liczbę oczek
def getAverage(n):
  results = []
  for i in range(n):
    results.append(random.randint(1, 6))
  return sum(results) / len(results)

# Wykonujemy 100000 razy 100 rzutów kością
average = []
for i in range(100000):
  average.append(getAverage(100))

# Wyniki uzyskane we wszystkich testach przedstawiamy na histogramie
plt.hist(average)
plt.xlabel('Średnia liczba oczek')
plt.ylabel('Częstość')
plt.show()
```


$n = 2$
$n = 10$
$n = 100$
$n = 1000$
Częstość
Średnia liczba oczek

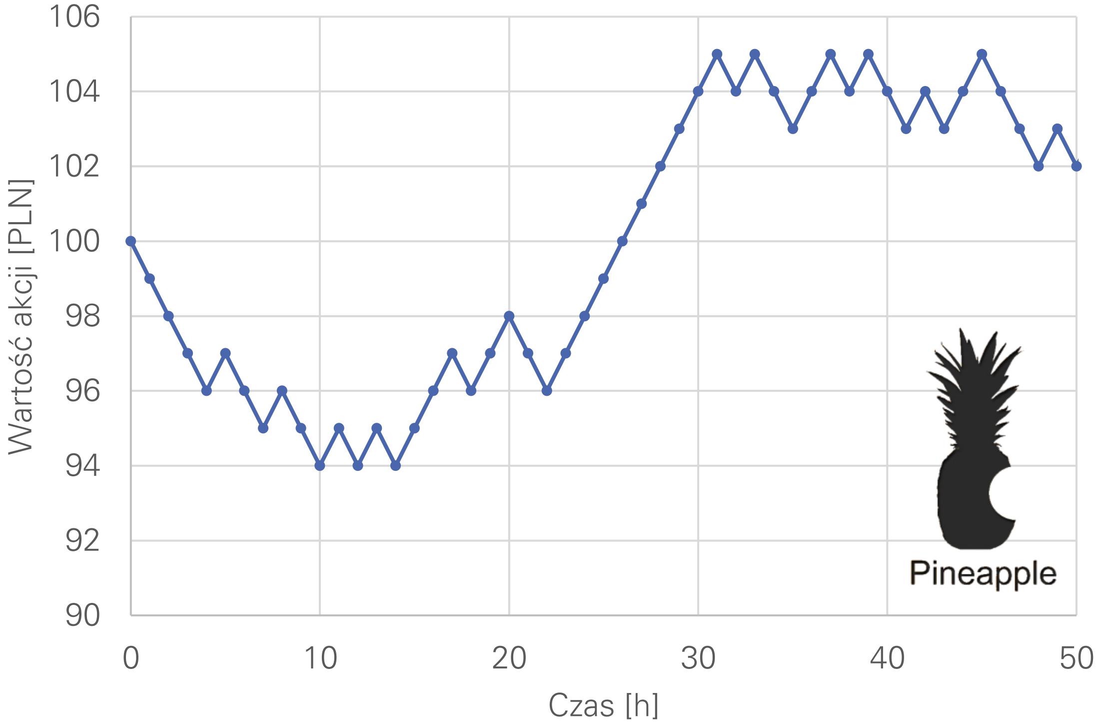
Ciekawostka: zbieżność do rozkładu normalnego

- Według tzw. *Centralnego Twierdzenia Granicznego* rozkład średniej zawsze zbiega do tzw. rozkładu normalnego.



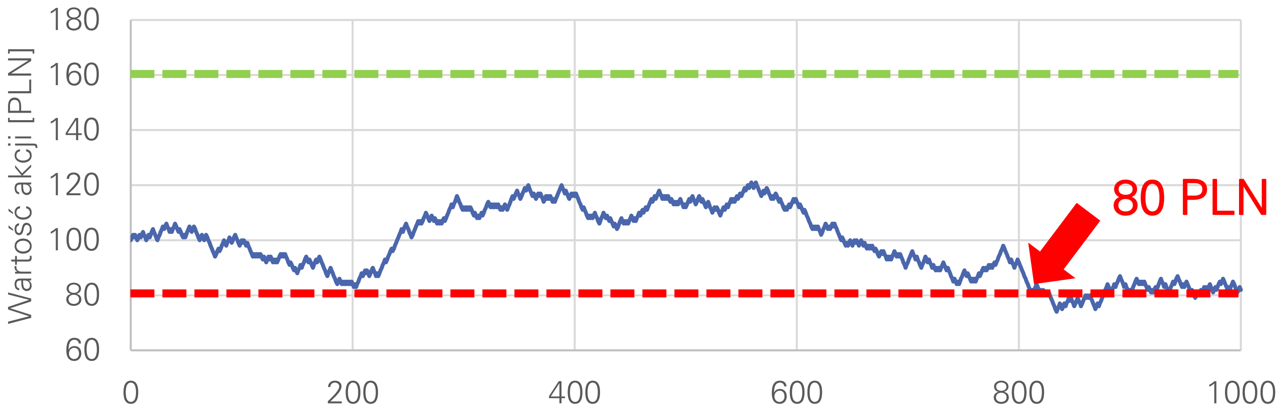
Case study: Algorytmy tradingowe (1/4)

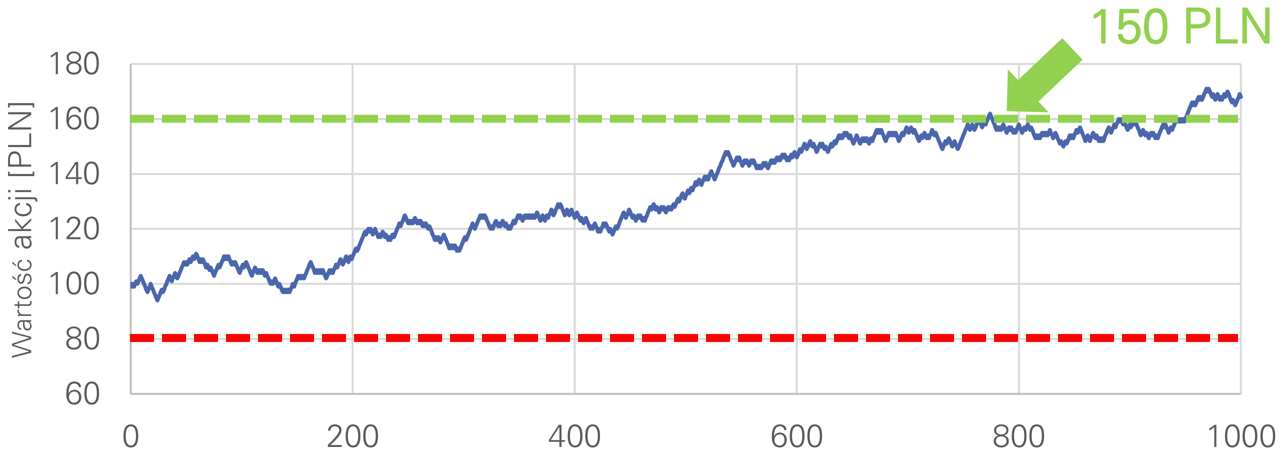
- Do gry na giełdzie często stosuje się algorytmy tradingowe, które automatycznie podejmują decyzję o zakupie i sprzedaży akcji.
- Rozważmy akcję firmy Pineapple, która na początku jej zakupu jest warta 100 PLN, a każdej godziny jej wartość może z równym prawdopodobieństwem wzrosnąć o 1 PLN, lub spaść o 1 PLN.



Case study: Algorytmy tradingowe (2/4)

- Rozważmy algorytm, który po zakupie akcji firmy Pineapple, sprzeda ją albo kiedy jej wartość **spadnie poniżej 80 PLN**, albo kiedy jej wartość **wzrośnie do 150 PLN**.
- Jakie jest prawdopodobieństwo zysku na zakupie tej akcji?





Case study: Algorytmy tradingowe (3/4)

- O ile zmienia się wartość oczekiwana po każdej godzinie?

$$E(\Delta X) = \frac{1}{2} \cdot (+1) + \frac{1}{2} \cdot (-1) = 0$$

- Zatem wartość oczekiwana naszego zysku ze sprzedaży akcji po dowolnym czasie musi wynosić 0.
- Oznaczmy prawdopodobieństwo osiągnięcia zysku $+50$ PLN jako p, a prawdopodobieństwo straty -20 PLN jako $1 - p$.
- Zatem wartość oczekiwana naszego zysku po sprzedaży akcji wynosi:

$$p \cdot (+50) + (1 - p) \cdot (-20) = 0$$

Case study: Algorytmy tradingowe (4/4)

- Zatem wartość oczekiwana naszego zysku po sprzedaży akcji wynosi:

$$p \cdot (+50) + (1 - p) \cdot (-20) = 0$$

- Rozwiązując to równanie znajdujemy p:

$$\begin{aligned} 50p - 20 + 20p &= 0 \\ 70p - 20 &= 0 \\ 70p &= 20 \\ p &= \frac{2}{7} \approx 29\% \end{aligned}$$

- Zatem mamy około 29% szans na zarobienie 50 PLN oraz 71% na stratę -20 PLN.

Wartość oczekiwana – inne zastosowania

Podsumowanie wykładu

- *Wartość oczekiwana* to średnią wartość, jakiej możemy się spodziewać po wykonaniu bardzo dużej liczby jego powtórzeń.
- Wartość oczekiwaną wyniku X oznacza się jako $E(X)$ obliczamy ją następująco:

$$E(X) = P(X = x_1) \cdot x_1 + P(X = x_2) \cdot x_2 + \cdots + P(X = x_n) \cdot x_n$$

- Zgodnie z *Prawem Wielkich Liczb*, gdy liczba prób losowego doświadczenia dąży do nieskończoności, średnia arytmetyczna wyników tych prób dąży do ich wartości oczekiwanej.