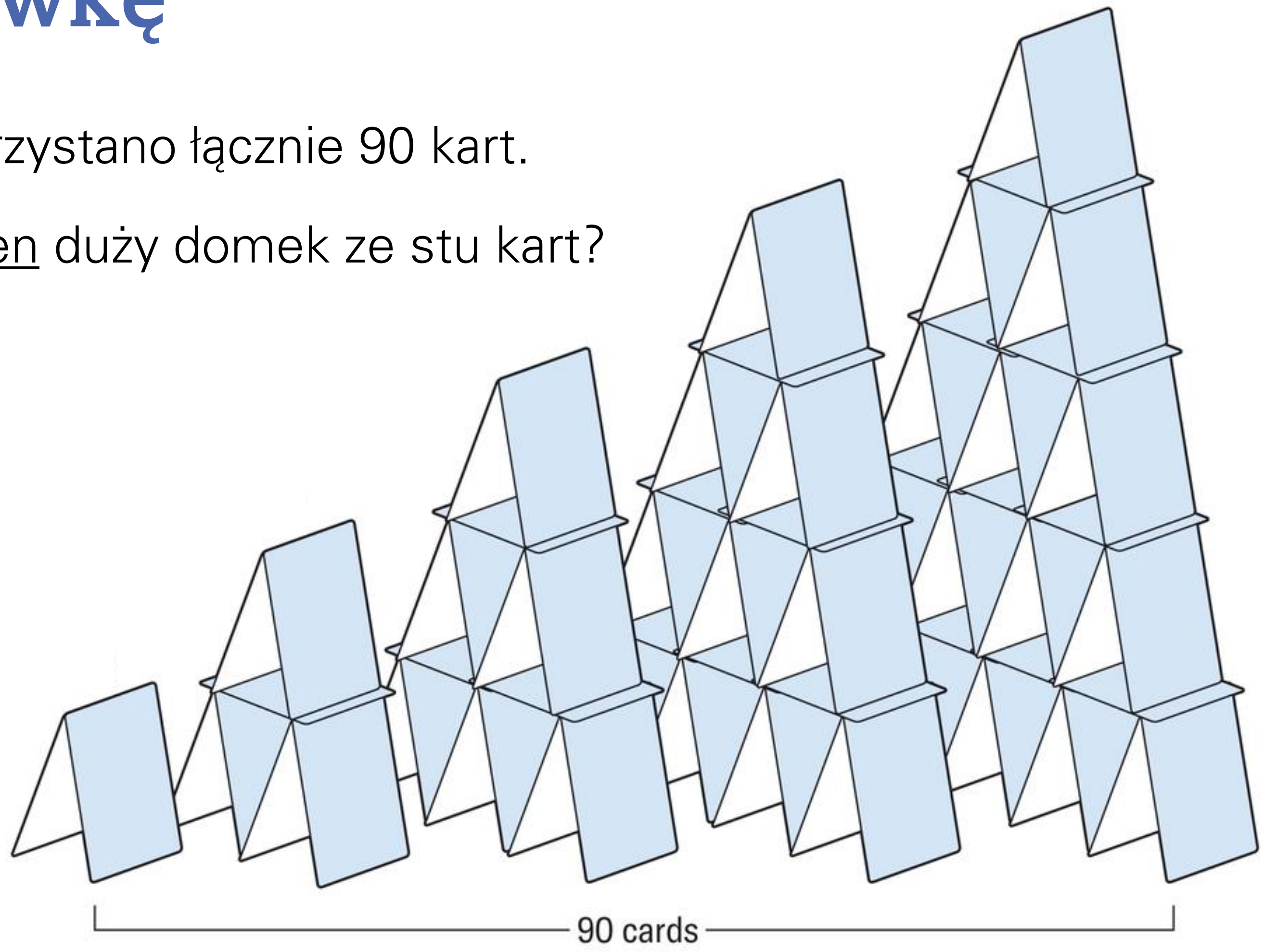
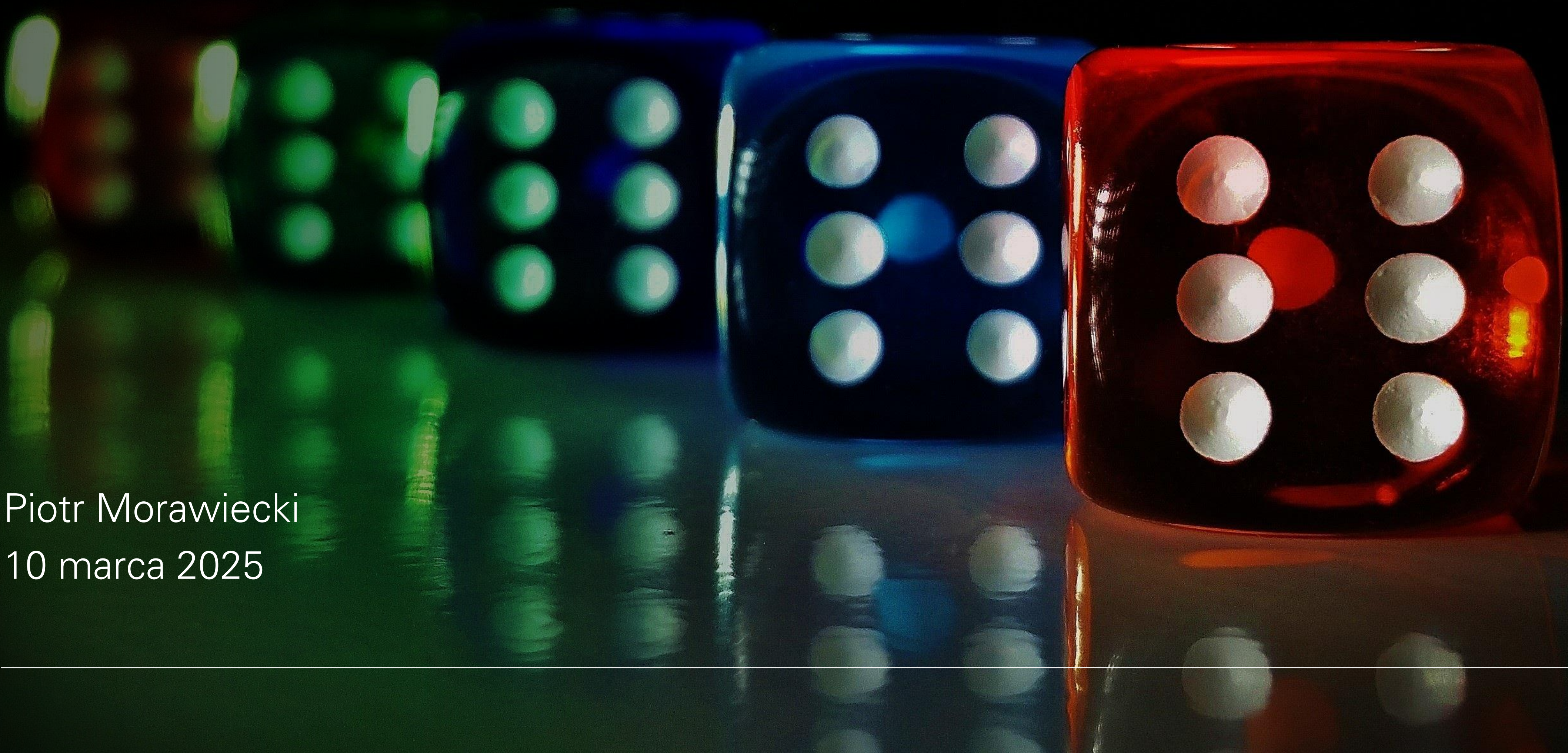
Łamigłówka na rozgrzewkę

Do zbudowania tych pięciu domków wykorzystano łącznie 90 kart.

Czy można tą samą metodą zbudować jeden duży domek ze stu kart?



Wykład 2. O prawdopodobieństwie w grach losowych



Piotr Morawiecki

10 marca 2025

Czym jest prawdopodobieństwo?

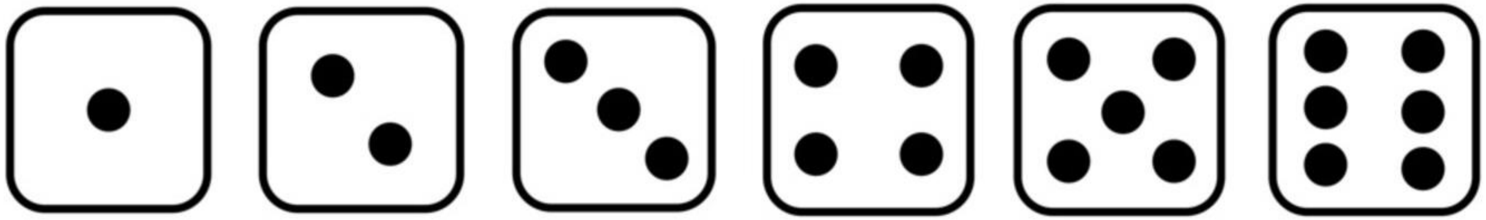
- Prawdopodobieństwo jest miarą częstości zachodzenia pewnego zjawiska.
- Przykład:

Prawdopodobieństwo wyrzucenia orła podczas rzutu monetą wynosi $\frac{1}{2}$.
Oznacza to, że przy wielkokrotnym rzucie monetą statystycznie
w przypadku połowy rzutów powinien wypaść orzeł.

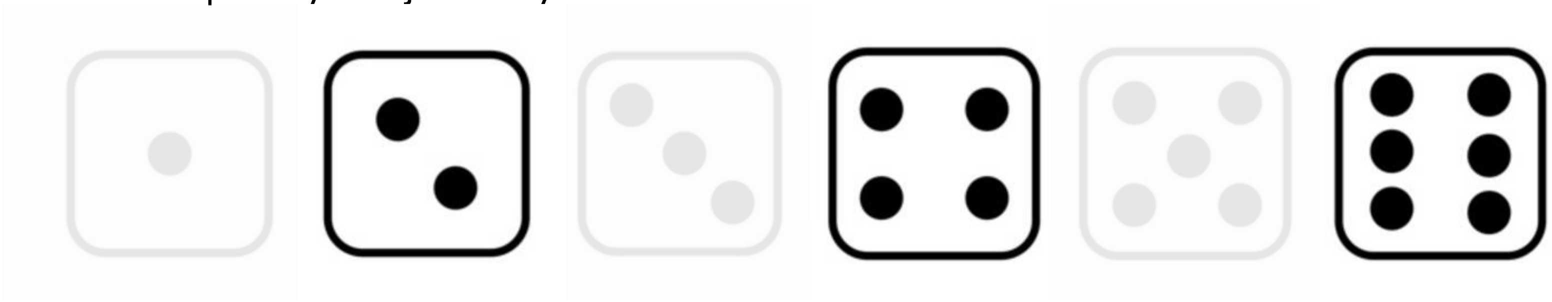
Czym jest prawdopodobieństwo?

Przestrzeń zdarzeń elementarnych

- *Przestrzeń zdarzeń elementarnych* (Ω) to zbiór wszystkich możliwych wyników doświadczenia losowego (np. rzutu kościa).



- Zdarzenie będzie opisywane jako pewien podzbiór *przestrzeni zdarzeń elementarnych*.
- **Przykład:** Wyrzucenie parzystej liczby oczek na kości



liczby zdarzeń elementarnych sprzyjających zdarzeniu

Definicja Laplace'a prawdopodobieństwa

- Prawdopodobieństwo pewnego zdarzenia A można zdefiniować jako:

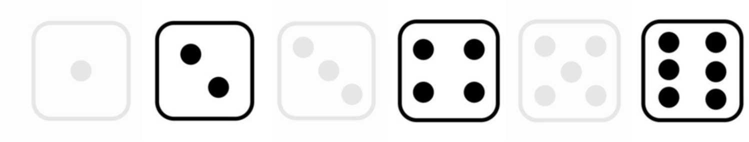
$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$$

gdzie:

  - $|\Omega|$ to liczba wszystkich możliwych zdarzeń elementarnych,
  - $|A|$ to liczba zdarzeń elementarnych sprzyjających zdarzeniu A.

- Przykład:

$$P(\text{parzysta liczba oczek}) = \frac{|\text{parzysta liczba oczek}|}{|\text{dowolna liczba oczek}|} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$



Pierre-Simon Laplace
(1749 – 1827)

Więcej przykładów

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$$

- Prawdopodobieństwo wyrzucenia orła

$$P(\text{wyrzucenie orła}) = \frac{|\{\text{orzeł}\}|}{|\{\text{orzeł},\ \text{reszka}\}|} = \frac{1}{2}$$

- Prawdopodobieństwo wylosowania asa z talii kart

$$P(\text{wylosowanie asa}) = \frac{|\{\text{A}\}|}{|\{2,3,4,5,6,7,8,9,10,\text{J},\text{Q},\text{K},\text{A}\}|} = \frac{1}{13}$$

- Prawdopodobieństwo wylosowania króla kier z talii kart

$$P(\text{wylosowanie króla kier}) = \frac{1}{52}$$

Problemy z definicją Laplace'a…

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$$

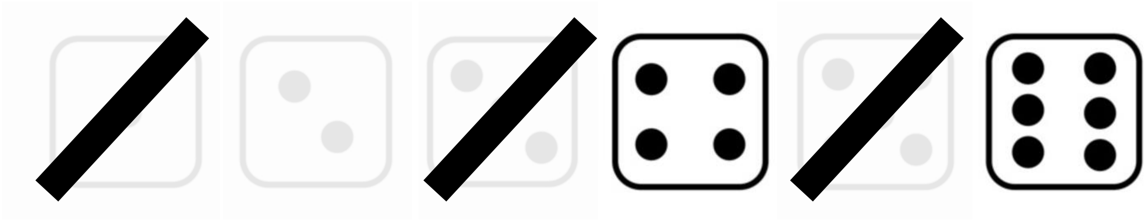
NIESKOŃCZONA LICZBA ZDARZEŃ

JEDNORAZOWE ZDARZENIA

Prawdopodobieństwo zależne

- *Prawdopodobieństwo zależne* oznacza prawdopodobieństwo zajścia zdarzenia A, jeśli zaszło zdarzenie B. Oznaczamy je jako $P(A|B)$.
- Przykład:

Na kostce wypadła parzysta liczba oczek.
Jaka jest szansa, że liczba oczek jest większa od 3?



$$P\ (\text{liczba oczek} > 3 \mid \text{parzysta liczba oczek}) = \frac{2}{3}$$

Prawdopodobieństwo zależne

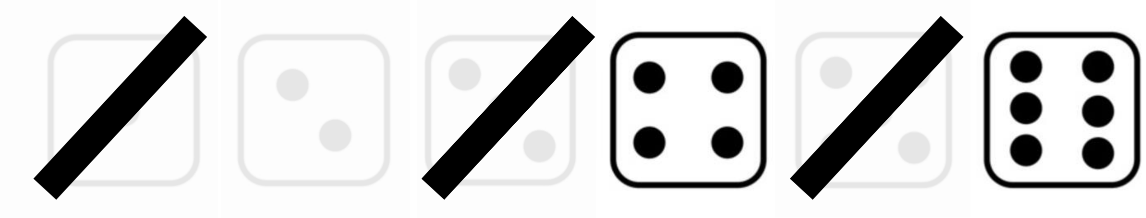
- Matematycznie możemy obliczyć prawdopodobieństwo warunkowe następująco:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cup B)}{P(B)}$$

gdzie $P(A \cup B)$ to prawdopodobieństwo zajścia zarówno zdarzenia A i B.

- W naszym przykładzie:

$$P\ (\text{liczba oczek} > 3\ |\ \text{parzysta liczba oczek}) = \frac{P(\text{liczba oczek} > 3 \text{ i parzysta})}{P(\text{parzysta liczba oczek})} = \frac{2}{3}$$

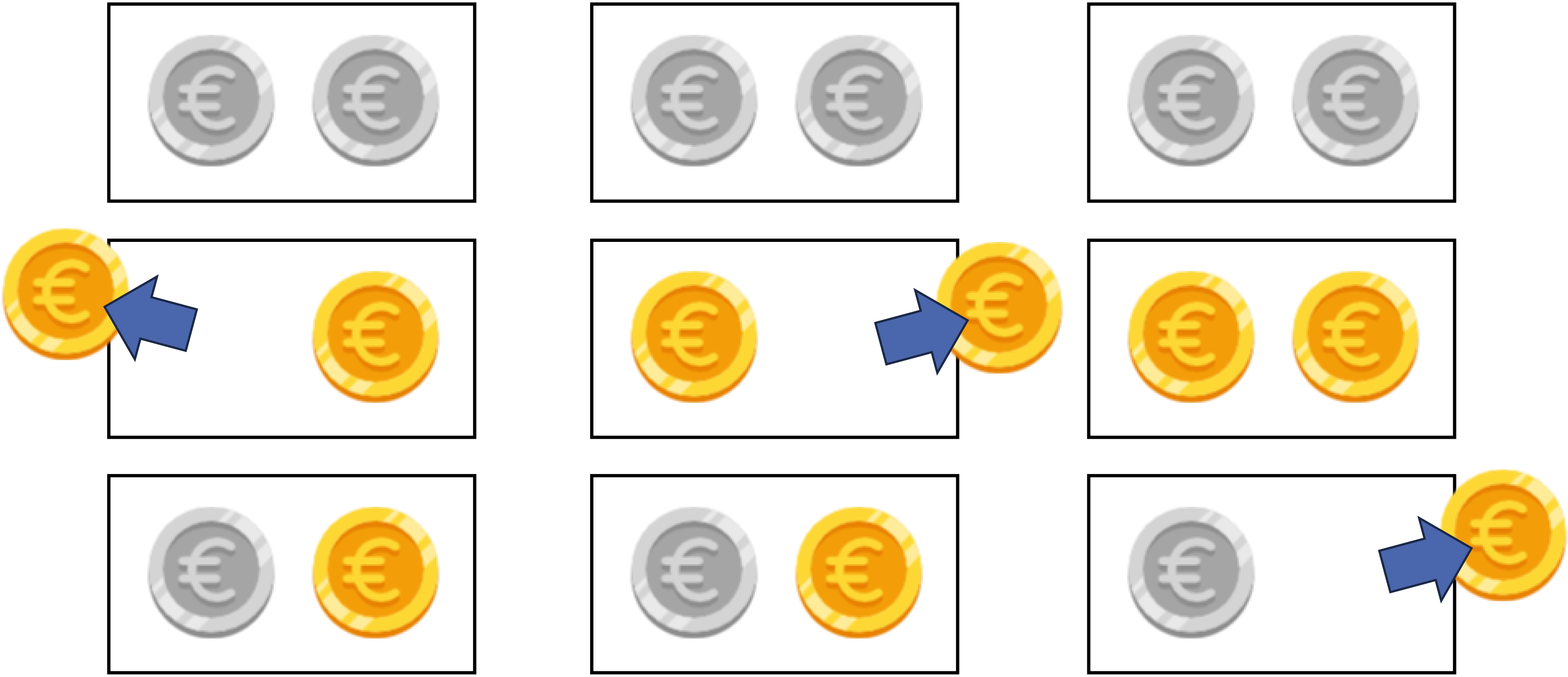


Przykład: Pudełka Bertranda (1/2)

- Mamy trzy pudła:
  - pudło z dwiema srebrnymi monetami,
  - Pudło z dwiema złotymi monetami, i
  - Pudło z jedną srebrną i jedną złotą monetą.

- W losowy sposób z jednego pudła wyjmujemy jedną monetę. Okazało się, że jest złota.
- Jakie jest prawdopodobieństwo, że druga moneta w tym pudle też jest złota?

Przykład: Pudełka Bertranda (2/2)



Zdarzenia zależne i niezależne

ZDARZENIA ZALEŻNE

ZDARZENIA NIEZALEŻNE

Prawdopodobieństwo zdarzeń niezależnych

- Zdarzenia A i B są *niezależne* wtedy kiedy zajście zdarzenie A nie wpływa na prawdopodobieństwo zajścia zdarzenia B i vice versa:

$$P(A) = P(A|B) \quad \text{oraz} \quad P(B) = P(B|A)$$

- Wówczas:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cup B)}{P(B)} = P(A)$$

- Zatem:

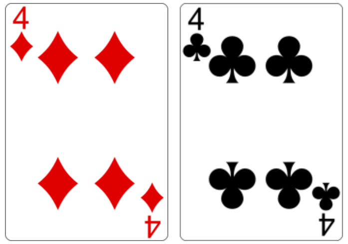
$$P(A \cup B) = P(A) \cdot P(B)$$

Przykłady zdarzeń niezależnych (1/2)

- Czterokrotne wyrzucenie orła

$$P(\text{cztery orły}) = P(\text{orzeł}) \cdot P(\text{orzeł}) \cdot P(\text{orzeł}) \cdot P(\text{orzeł})$$

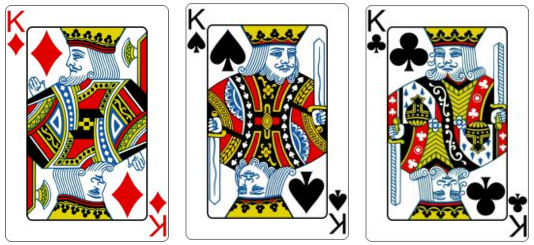
- Wylosowanie dwóch kart o tej samej wartości



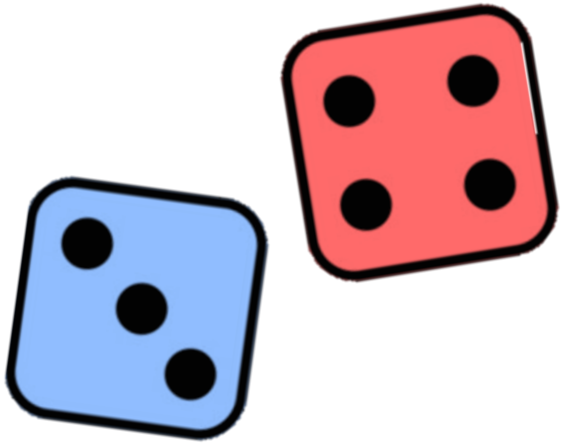
$$P(\text{para kart}) = P(\text{dowolna karta}) \cdot P(\text{karta o tej samej wartości})$$

- Wylosowanie trzech kart o tej samej wartości

$$P(\text{trójka kart}) = \frac{52}{52} \cdot \frac{3}{51} \cdot \frac{2}{50} = \frac{1}{425}$$



Przykłady zdarzeń niezależnych (2/2)



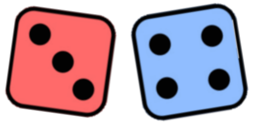
- Wyrzucenie nieparzystej liczby oczek na kostce niebieskiej i parzystej liczby oczek na kostce czerwonej

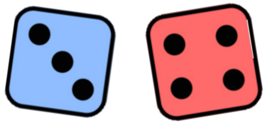
$$P(\text{niebieska nieparzysta} \cup \text{czerwona parzysta}) =$$

$$P(\text{niebieska nieparzysta}) \cdot P(\text{czerwona parzysta}) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

- Wyrzucenie nieparzystej liczby oczek na jednej kostce i parzystej liczby oczek na drugiej kostce

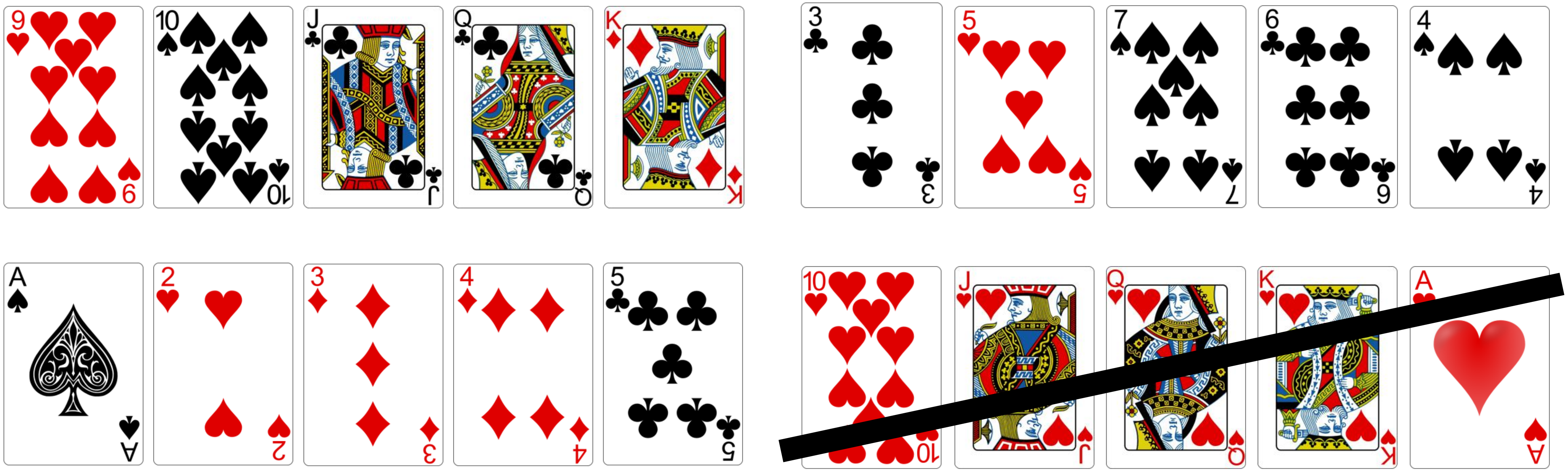
$$P(\text{czerwona nieparzysta} \cup \text{niebieska parzysta}) + P(\text{niebieska nieparzysta} \cup \text{czerwona parzysta}) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$





$$P(\text{dowolny wynik na kości czerwonej}) \cdot P(\text{przeciwny wynik na kości niebieskiej}) = 1 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

Case study: prawdopodobieństwo „strita” (1/5)



Case study: prawdopodobieństwo „strita” (2/5)

- Zacznijmy od obliczenia prawdopodobieństwa dobrania **pięciu różnych kart** od 10-tki do asa.

$$P(\text{karty od } 10 \text{ do asa}) = \underbrace{\frac{5\cdot 4}{52}}_{\text{Prawdopodobieństwo dobrania karty od 10 do asa}} \cdot \overbrace{\frac{4\cdot 4}{51}}^{\text{Prawdopodobieństwo dobrania karty od 10 do asa o innej wartości niż poprzednio wylosowana}} \cdot \frac{3\cdot 4}{50} \cdot \frac{2\cdot 4}{49} \cdot \frac{1\cdot 4}{48} = \frac{64}{162435} \approx 0.000394$$

Case study: prawdopodobieństwo „strita” (3/5)

- Teraz obliczamy prawdopodobieństwa wylosowania **pokera** od 10-tki do asa.

Prawdopodobieństwo wylosowania karty od 10 do asa
o innej wartości niż poprzednio wylosowana, **ale w tym samym kolorze**.

$$P(\text{poker od 10 do asa}) = \underbrace{\frac{5 \cdot 4}{52}} \cdot \overbrace{\frac{4}{51}} \cdot \frac{3}{50} \cdot \frac{2}{49} \cdot \frac{1}{48} = \frac{1}{649740} \approx 0.000001539$$

Prawdopodobieństwo wylosowania karty od 10 do asa

Case study: prawdopodobieństwo „strita” (4/5)

- Podsumowując:

$$P(\textbf{karty}\ \text{od}\ \ 10\ \text{do asa}) = \frac{64}{162435} \qquad\qquad P(\textbf{poker}\ \text{od}\ 10\ \text{do asa}) = \frac{1}{649740}$$

- Zatem prawdopodobieństwo wylosowania strita (układu pięciu kolejnych kart, który nie jest pokerem) wynosi:

$$P(\textbf{strit}\ \text{od}\ 10\ \text{do asa}) = P(\textbf{karty}\ \text{od}\ \ 9\ \text{do asa}) - P(\textbf{poker}\ \text{od}\ 9\ \text{do asa})$$

$$= \frac{64}{162435} - \frac{1}{649740} = \frac{1}{2548} = 0.000392 = 0.0392\%$$

Case study: prawdopodobieństwo „strita” (5/5)

- Strit może zaczynać się od dowolnej karty od asa do 10-tki. Zatem:

$$P(\text{strit}) = \underbrace{P(\text{strit od asa do 5}) + P(\text{strit od 2 do 5}) + P(\text{strit od 3 do 6}) + \cdots + P(\text{strit od 10 do asa})}_{\text{łącznie 10 stritów}}$$

- Prawdopodobieństwo dla każdego strita jest takie samo (równe $\frac{1}{2548}$). Stąd:

$$P(\text{strit}) = 10 \cdot \frac{1}{\underbrace{2548}_{\text{prawdopodobieństwo strita od 10 do asa}}} = \frac{10}{2548} \approx 0.0039 = 0.39\%$$

Podsumowanie wykładu

- Prawdopodobieństwo jest miarą częstości zachodzenia danego zdarzenia.
- Można je zdefiniować wykorzystując definicję Laplace'a: $P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$
- Prawdopodobieństwo zajścia zdarzenia A pod warunkiem zajścia zdarzenia B wynosi:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cup B)}{P(B)}$$

- Jeśli dwa zdarzenia są niezależne to:

$$P(A \cup B) = P(A) \cdot P(B)$$