

Organizatorzy:



Partnerzy



Presto

XVI edycja „Matematyki dla Ciekawych Świata”

Matematyka w świecie gier i strategii

Organizacja:

dr Maria Gokieli

Wykład:

dr Piotr Morawiecki

Ćwiczenia i laby:

Patryk Greszta, Grzegorz Kwacz,
Daniel Laskowski, Krzysztof Lasocki,
Wojtek Matusiak, Robert Paciorek,
Agnieszka Przybysz



UNIWERSYTET WARSZAWSKI
Interdyscyplinarne Centrum Modelowania
Matematycznego i Komputerowego
icm.edu.pl



Warszawa



MATEM4TYKA
DLA CIEKAWYCH ŚWIATA

MUZYKA FILM SZTUKA
Presto



UKSW

Dlaczego gry?

Matematyka w świecie gier

Część 1. Teoria prawdopodobieństwa

Podstawy rachunku
prawdopodobieństwa

Wartość oczekiwana i
prawo wielkich liczb

Metoda Monte Carlo

Błądzenie losowe

Część 2. Teoria gier

Strategia minimax

Równowaga Nasha

Twierdzenie Nasha

Monte Carlo
Tree Search

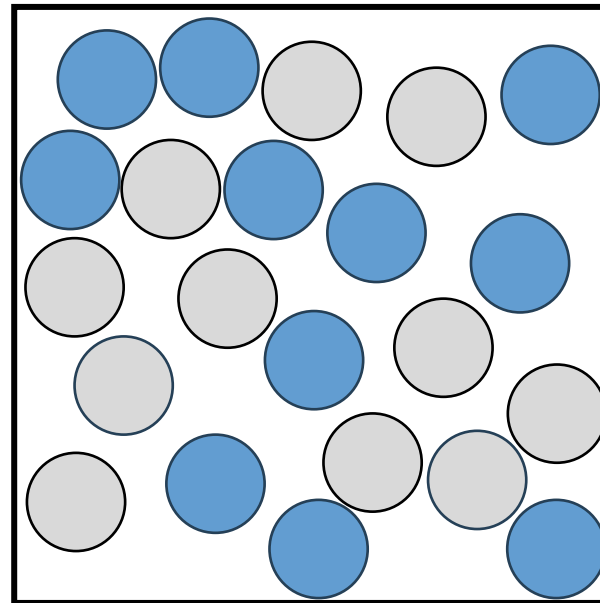
Wykład 1. W poszukiwaniu optymalnej strategii



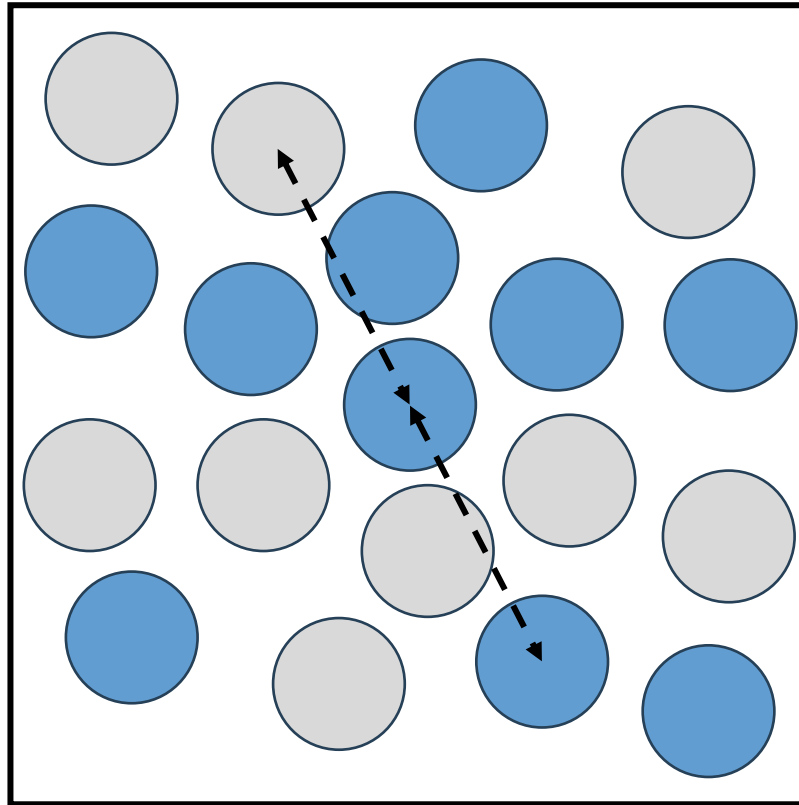
Piotr Morawiecki
3 marca 2025

Przykład 1: Rozmieszczanie żetonów

- Gra rozgrywa się na kwadratowej planszy (np. o wymiarach 6×6).
- Gracze na zmianę umieszczają na szachownicy żetony w kształcie kół (np. o średnicy 1).
- Żetony nie mogą na siebie nachodzić ani wychodzić poza krawędź szachownicy.
- Przegrywa gracz, który nie może wykonać ruchu.
- Czy jak powinien grać pierwszy gracz, żeby zagwarantować sobie wygraną?



Strategia wygrywająca



Czym jest strategia wygrywająca?

- *Strategia* jest sposobem, w jaki gracz wybiera swoje ruchy w grze.
- Strategia jest *wygrywająca*, wtedy kiedy gracz ją stosujący ma gwarancję wygranej, niezależnie od ruchów wykonywanych przez przeciwnika.

Czy obu graczy może mieć strategię wygrywającą?

Czy dla każdej gry jeden z graczy ma strategię wygrywającą?

Jak ją tą strategię odnaleźć?

Gry zdeterminowane

- Gra jest *zdeterminowana* wtedy, kiedy jeden z graczy ma strategię wygrywającą.
- Zgodnie z tzw. Twierdzenie Zermelo:

Jeśli gra dla dwóch graczy spełnia wszystkie poniższe kryteria:

- 1) gracze wykonują ruchy na zmianę,
- 2) gracze mają pełną informację o stanie gry,
- 3) gra ma skończoną długość,
- 4) gra zawsze kończy się zwycięstwem jednego z graczy.

to ta gra jest zdeterminowana.

- Czy gra w rozmieszczanie żetonów jest grą zdeterminowaną?
 - Czy szachy są grą zdeterminowaną?
-

Oryginalne twierdzenie Zermelo

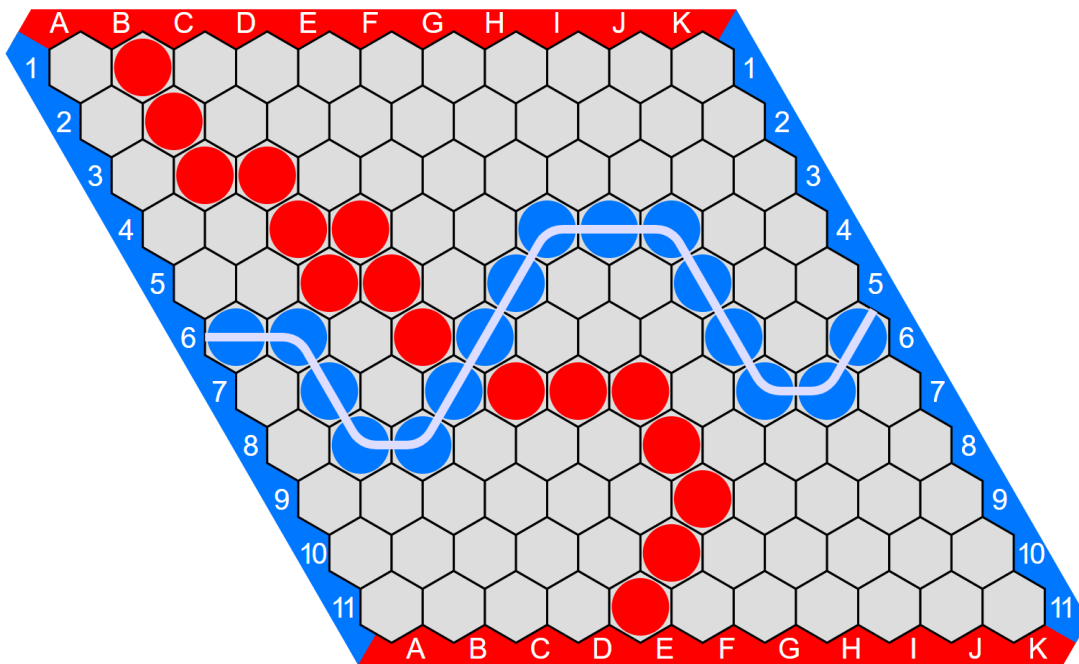
- W Ernst Zermelo stwierdził, że w szachach:
 - gracz grający białymi może wymusić zwycięstwo, albo
 - gracz grający czarnymi może wymusić zwycięstwo, albo
 - obaj gracze mogą wymusić co najmniej remis.
- Praca z 1913 roku, w której E. Zermelo opisał powyższą teorię, jest uznawana za pierwszą publikację dotyczącą *teorii gier*.



Ernst Zermelo (1871–1953)

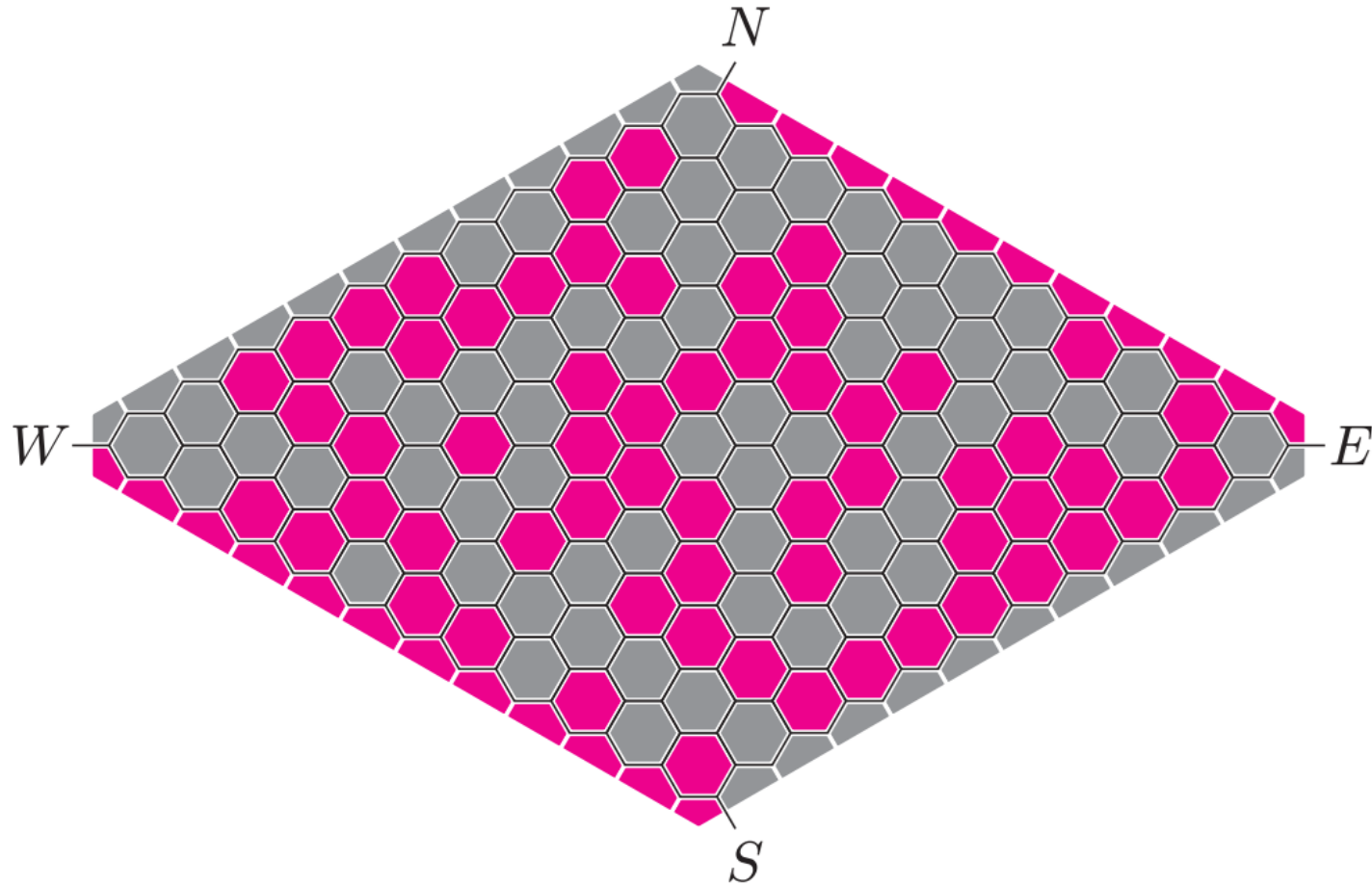
Przykład 3: Gra w hex

- Gracze na zmianę ustawiają żetony na jednym z wolnych pól na planszy.
- Gracz wygrywa jeśli połączy przeciwległe ścianki planszy swoimi żetonami.

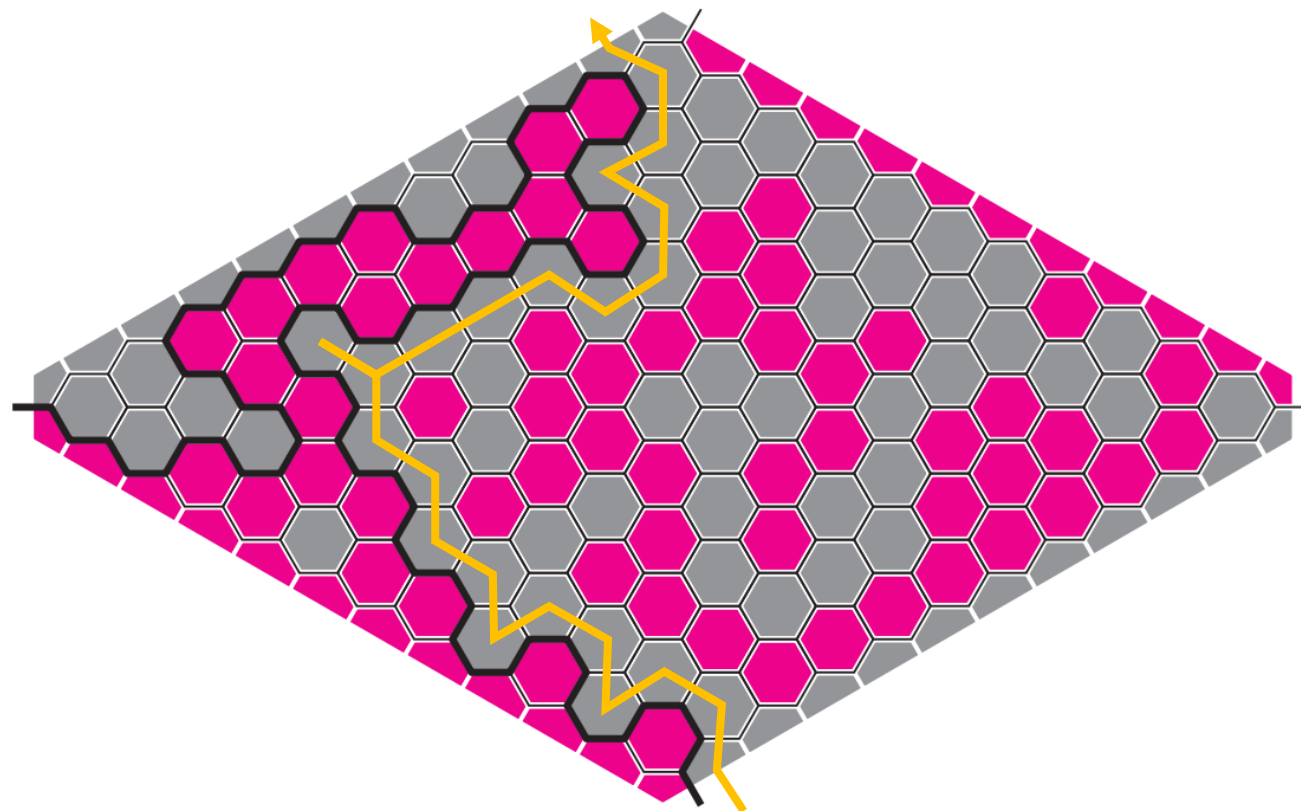


- Czy gracze wykonują ruchy na zmianę? ✓
- Czy gracze mają pełną informację o stanie gry? ✓
- Czy ta gra ma skończoną długość? ✓
- Czy gra kończy się zawsze zwycięstwem jednego z graczy?

Czy w tej grze można zremisować?

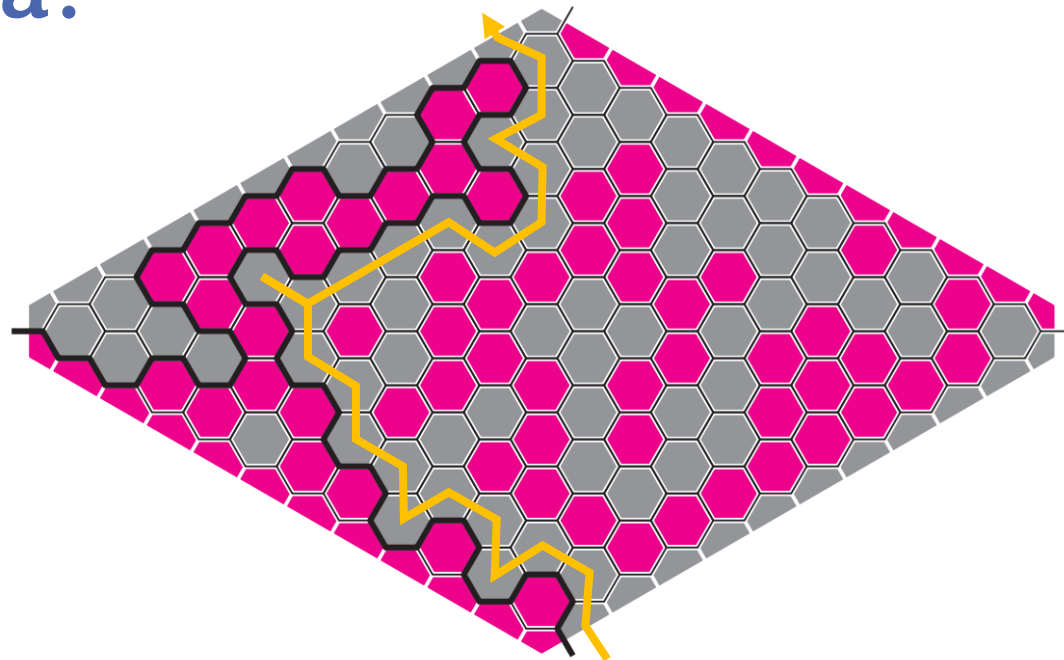


Czy w tej grze można zremisować?



Czy gra jest zdeterminowana?

- Czy gracze wykonują ruchy na zmianę? ✓
- Czy gracze mają pełną informację o stanie gry? ✓
- Czy ta gra ma skończoną długość? ✓
- Czy gra kończy się zawsze zwycięstwem jednego z graczy? ✓



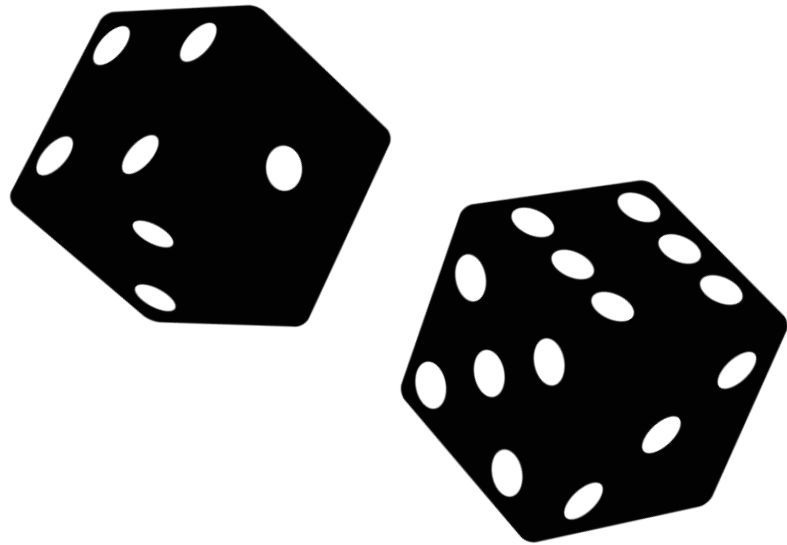
Zatem zgodnie z twierdzeniem Zermelo gra jest zdeterminowana, tzn. jeden z graczy ma strategię wygrywającą. **Tylko który?**

Który z graczy ma strategię wygrywającą?

- Przypuśćmy, że wygrywającą strategię ma gracz II.
 - Gracz I powinien rozpocząć od zupełnie dowolnego ruchu, a następnie postępować tak, jak nakazuje hipotetyczna strategia gracza II, zamieniając miejscami kolory.
 - Jeśli podkradziona strategia nakazuje zająć pole, na którym już stoi pionek, wtedy ponownie wykonujemy dowolny możliwy ruch.
 - Posiadanie dodatkowego pionka na planszy nie pogarsza sytuacji gracza, zatem podkradziona strategia gwarantuje zwycięstwo pierwszemu graczowi. W ten sposób otrzymujemy sprzeczność z założeniem o istnieniu strategii dla drugiego gracza.
 - Zatem to pierwszy gracz ma strategię wygrywającą. Ale jaką?
-

O losowości w grach

LOSOWE ELEMENTY W GRZE



LOSOWY DOBÓR STRATEGII



Podsumowanie wykładu

- Jeśli gra dla dwóch graczy spełnia wszystkie poniższe kryteria:
 - 1) gracze wykonują ruchy na zmianę,
 - 2) gracze mają pełną informację o stanie gry,
 - 3) gra ma skończoną długość,
 - 4) gra zawsze kończy się zwycięstwem jednego z graczy.



to gra jest zdeterminowana.

- Określenie strategii wygrywających jest często bardzo złożonym zadaniem.
 - W ciągu tego semestru nauczymy się narzędzi pozwalających szukać tych strategii oraz analizować strategię w innych klasach gier.
-