

Ćwiczenia 2

O prawdopodobieństwie w grach losowych

Projekt „Matematyka dla ciekawych świata”

spisał: Piotr Morawiecki

zadania pochodzą z różnych źródeł

1 Podsumowanie wykładu

Wprowadzenie

Prawdopodobieństwo jest miarą, która określa jak bardzo możliwe, że dane zdarzenie nastąpi. Wyraża się go liczbą z przedziału od 0 do 1, gdzie 0 oznacza, że zdarzenie jest niemożliwe, a 1 oznacza, że zdarzenie jest pewne.

Rozważamy doświadczenie losowe, tzn. sytuację o nieznanym z góry wyniku, takie jak na przykład rzut kością. Może on dać różne wyniki (na przykład jedno oczko, dwa oczka, itd.), które są nazywane *zdarzeniami elementarnymi*. Zbiór wszystkich zdarzeń elementarnych oznacza się wielką literą Ω .

Definicja Laplace’a prawdopodobieństwa

Prawdopodobieństwo $P(A)$ zajścia zdarzenia A to stosunek liczba zdarzeń elementarnych sprzyjających zdarzeniu A do liczby wszystkich możliwych zdarzeń elementarnych. Matematycznie można to zapisać jako:

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|},$$

gdzie $|\cdot|$ oznacza liczbę wszystkich elementów danego zbioru. Przykładowo prawdopodobieństwo wyrzucenia na 6-ściennej kostce co najmniej trzech oczek, jest równa:

$$P(\text{liczba oczek} \geq 3) = \frac{|3, 4, 5, 6|}{|1, 2, 3, 4, 5, 6|} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3} \approx 67\%$$

Powyższej przedstawiona definicja zakłada, że wszystkie zdarzenia elementarne są równie prawdopodobne, oraz że wzajemnie się one wykluczają, czyli nie mogą zajść jednocześnie.

Zdarzenia niezależne i zależne

Dwa zdarzenia A i B są od siebie **niezależne**, kiedy zajście jednego zdarzenia nie wpływa na prawdopodobieństwo zajścia drugiego (np. wyrzucenie orła przy dwukrotnym rzucie monetą).

Prawdopodobieństwo, że oba zdarzenia A i B zajdą obliczamy, mnożąc prawdopodobieństwo zajścia każdego z nich:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B).$$

Przykładowo szansa na wyrzucenie orła wynosi $\frac{1}{2}$. Szansa na dwukrotne wyrzucenie orła przy dwukrotnym rzucie monetą wynosi:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}.$$

2 Zadania

Zadanie 1

1. Sprawdźcie, czy są wśród was dwie osoby, które obchodzą urodziny tego samego dnia.
 2. Oszacujcie prawdopodobieństwo tego, że w grupie o takiej liczebności są co najmniej dwie osoby, które się urodziły tego samego dnia.
 3. Przy jak dużej liczebności grupy prawdopodobieństwo to przekracza 50%?
 4. Jakie założenie poczyniliście, odpowiadając na zadania b) i c)?
- a) dwie losowo dobrane karty będą tego samego koloru (kier, pik, itd.),
 - b) dwie losowo dobrane karty będą tej samej wartości (dwójka, trójka, itd.),
 - c) cztery losowo wybrane karty ułożą się w "karetę" (czyli będą tej samej wartości),
 - d) pięć losowo dobranych kart ułoży się w "kolor" (czyli będą tego samego koloru),
 - e) pięć kart ułoży się w "strita" (czyli przyjmą kolejne wartości, np. 9, 10, J, Q, K),
 - f) pięć kart ułoży się w "pokera" (czyli przyjmą kolejne wartości w tym samym kolorze),
 - g) (*) w pięciu losowo dobranych kartach będzie kareta (cztery karty o tej samej wartości).

Zadanie 2

W tym zadaniu rozważymy standardowe kostki do gry z sześcioma ściankami z 1, 2, 3, 4, 5 i 6 oczkami. Oblicz, jakie jest prawdopodobieństwo, że podczas rzutu dwiema kostkami wypadnie:

- a) na każdej kostce pięć oczek,
- b) na obu kostkach ta sama liczba oczek,
- c) łącznie parzysta liczba oczek,
- d) na co najmniej jednej kostce sześć oczek,
- e) łącznie 12 oczek,
- f) łącznie 7 oczek,
- g) łącznie 9 oczek.

Zadanie 3

W tym zadaniu rozważymy talię do gry w pokera składającą się z 24 kart (9-tki, 10-tki, walety, damy, króle, asy). Oblicz, jakie jest prawdopodobieństwo, że:

Zadanie 4

W Amerykańskim teleturnieju "Let's Make a Deal" uczestnicy wybierali jedno z trzech zamkniętych drzwi. Za jednym z drzwi znajdowała się główna nagroda (samochód), a za dwiema pozostałymi koza. Po dokonania przez uczestników wyboru prowadzący zawsze otwierał te z pozostałych dwóch drzwi, za którymi prowadzący wiedział, że znajdowała się koza. Następnie uczestnik konkursu mógł zdecydować czy chce zmienić swój początkowy wybór na drugie zamknięte drzwi.

Jakie jest prawdopodobieństwo wygranej, jeśli uczestnik zdecydował się zmienić drzwi, a jakie jeśli pozostał przy swoim początkowym wyborze?

Zadanie 5

Tabela 1 przedstawia wyniki dwóch zawodników tenisa z dwóch ostatnich sezonów.

	Zawodnik A	Zawodnik B
sezon 1	30 wygranych 20 przegranych	9 wygranych 11 przegranych
sezon 2	20 wygranych 5 przegranych	75 wygranych 25 przegranych

Tabela 1: Podsumowanie dwóch ostatnich sezonów

- a) Wyłącznie na podstawie wyników meczów z pierwszego sezonu oszacuj, z jakim prawdopodobieństwem każdy z graczy wygrywał mecze w tym sezonie.
- b) Powtórz poprzednie zadanie, korzystając wyłącznie z wyników meczów z drugiego sezonu.
- c) Określ, który z zawodników miał większą skuteczność w każdym z sezonów.
- d) Dodając do siebie dane z obu sezonów, oszacuj, z jakim prawdopodobieństwem każdy gracz wygrywa mecze. Jak ma się ta wartość do odpowiedzi udzielonych na poprzednie pytania?
- e) Kto ma większą szansę na wygraną, gdyby obaj zawodnicy zagrali ze sobą mecz?

Zadanie 6

Rzucamy trzy symetryczne monety jednym rzutem. Ponieważ przynajmniej dwie z nich spadną na tę samą stronę oraz jest szansa $1/2$, że pozostała moneta jest orłem lub reszką, stąd można dojść do wniosku, że szansa na to, że wszystkie trzy spadną na tę samą stronę, wynosi $1/2$. Czy jest to prawidłowy wynik? Jeśli nie, ile wynosi prawdopodobieństwo, że wszystkie spadną na tę samą stronę. Gdzie leży ewentualny błąd w pierwszym rozumowaniu?

Zadanie 7

- 1. Pan Jones ma dwójkę dzieci. Starsze z nich jest dziewczynką. Jakie jest prawdopodobieństwo, że Pan Jones ma dwie córki?
- 2. Pan Smith ma dwójkę dzieci. Co najmniej jedno z nich jest chłopcem. Jakie jest prawdopodobieństwo, że ma dwóch synów?
- 3. (*) Pan Brown ma dwójkę dzieci. Jedno z dzieci jest dziewczyną, która urodziła się we wtorek. Jakie jest prawdopodobieństwo, że drugie dziecko też jest dziewczynką?

Zadanie 8

Stanałeś do pojedynku z dwoma najsłynniejszymi rewolwerowcami na dzikim zachodzie – tylko jedna osoba z waszej trójki będzie mogła ująć z życiem. Billy strzela ze skutecznością 80%, tzn. po oddany strzału pokonuje przeciwnika z prawdopodobieństwem 80%. Wolniejszy Cassidy ma skuteczność 100%, za to jest najwolniejszy. Sam masz skuteczność jedynie 50%, za to jesteś najszybszy. Będziecie kolejno oddawać strzały, najpierw ty, potem Bill, a na końcu Cassidy, tak długo aż nie pozostanie na placu, tylko jeden rewolwerowiec.

Zaplanuj strategię, która da ci największą szansę na wygraną.

Zadanie 9

Oszacuj, jakie jest prawdopodobieństwo Twojej wygranej w pojedynku w poprzednim zadaniu, przy założeniu, że każdy rewolwerowiec stosuje najlepszą dla niego strategię.

Wskazówka: W tym zadaniu przydatny jest wzór na sumę szeregu geometrycznego:

$$1 + q + q^2 + q^3 + \dots = \frac{1}{1 - q}$$

gdzie $-1 < q < 1$. Mimo, że ta suma ta ma nieskończenie dużo wyrazów to zbiega ona do stałej wartości granicznej $\frac{1}{1-q}$. Na przykład $1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \dots = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2$

Zadanie 10

Do n -osobowego samolotu wsiada n podróżnych. Wchodzą po kolei, osoba po osobie. Pasażer pierwszy zapomniał numer na swoim bilecie i siadł losowo na jednym z miejsc. Każdy z następnych pasażerów robi jedną z dwóch rzeczy:

- Jeśli miejsce z numerem wskazanym na ich bilecie jest wolne, to siadają na swoim miejscu.
- Jeśli ich miejsce jest zajęte, siadają na losowo wybranym siedzeniu, które jest wolne.

Wyznaczyć prawdopodobieństwo tego, że ostatni wsiadający pasażer usiądzie na swoim miejscu, w przypadku gdy:

- a) $n = 2$
- b) $n = 4$
- c) dla ogólnego n

3 Praca domowa

Zadanie 11 (2 punkty)

Rzucamy dwa razy monetą. Na co najmniej jednej monecie wypada orzeł. Czy prawdopodobieństwo, że na obu monetach wypadł jest to

samo co prawdopodobieństwo, że na jednej monecie wypadł orzeł, a na drugiej reszka? Odpowiedź uzasadnij.

Zadanie 12 (2 punkty)

W tym zadaniu rozważymy talię do gry w pokera składającą się z 24 kart (9-tki, 10-tki, walety, damy, króle, asy). Oblicz, jakie jest prawdopodobieństwo, że:

- (a) trzy losowe dobrane karty będą tej samej wartości,
- (b) wśród pięciu losowo dobranych kart, każda karta będzie miała inną wartość (np. 9, 10, J, K, A).

Zadanie 13 (2 punkty)

W grze w ruletkę kulka upada na losową liczbę z przedziału od 1 do 37. Rozważmy dwie gry:

- (a) Jeśli wylosowana liczba jest podzielna przez 2, wygrywasz złotówkę, a w przeciwnym wypadku przegrywasz 1 złotówkę.
- (b) Jeśli wylosowana liczba jest podzielna przez 4, wygrywasz 3 złote, a w przeciwnym wypadku przegrywasz 1 złoty.

Mike chce zaczyna grę z 1 złotówką, i chce wygrać 3 złote. Uzasadnij kiedy prawdopodobieństwo wygranej jest większe, jakby rozegrał dwukrotnie grę (a) czy jednokrotnie grę (b).

Zadanie 14 (2 punkty)

Urna zawiera z prawdopodobieństwem 50% czerwoną kulę, a z prawdopodobieństwem 50% zieloną kulę. Wkładamy do urny identyczną czerwoną kulę jak ta, która może znajdować się w urnie. Następnie wyciągamy losową kulę z urny. Okazuje się być ona czerwona. Jakie jest prawdopodobieństwo, że kula, która pozostała w urnie, jest czerwona?