Ćwiczenia 1
W poszukiwaniu optymalnej strategii

Projekt „Matematyka dla ciekawych świata”
spisał: Piotr Morawiecki
zadania pochodzą z różnych źródeł

marzec 2024

1 Podsumowanie wykładu

Na wykładzie wprowadziliśmy pojęcia strategii, strategii wygrywającej i gry zdeterminowanej.

- *Strategia* jest sposobem, w jaki gracz wybiera swoje ruchy w grze.
- Strategia jest *wygrywająca*, wtedy kiedy gracz ją stosujący ma gwarancję wygranej, niezależnie od ruchów wykonywanych przez przeciwnika.
- Gra jest *zdeterminowana* wtedy, kiedy jeden z graczy ma strategię wygrywającą.

Poznaliśmy także tzw. Twierdzenie Zermelo:

> Jeśli gra dla dwóch graczy spełnia wszystkie poniższe kryteria:
>
> - gracze wykonują ruchy na zmianę,
> - gracze mają pełną informację o stanie gry,
> - gra ma skończoną długość,
> - gra zawsze kończy się zwycięstwem jednego z graczy.
>
> to ta gra jest zdeterminowana.

2 Zadania

Zadanie 1 (gra w zapałki)

Rozegraj następującą grę z kolegą z ławki. Przygotuj stos 20 zapałek. Gracze na zmianę zabierają zapałki ze stosu. W trakcie swojej kolejki gracz może zabrać ze stosu 1, 2 lub 3 zapałki. Gracz, który zabierze ostatnią zapałkę ze stosu, wygrywa grę.

Po rozegraniu 1-2 partii spróbuj odpowiedzieć na następujące pytania:

1. Jaka jest optymalna strategia dla drugiego gracza? Czy może on zagwarantować sobie wygraną?

2. Który gracz ma strategię wygrywającą, jeśli na stosie początkowo znajdowałyby się 22 zapałki?

3. Spróbuj uogólnić swoje obserwacje dla gry z n zapałkami. Który gracz ma strategię wygrywającą dla danego n? Jaka jest to strategia?

Zadanie 2 (gra w czekoladę)

Do gry potrzebujemy prostokątną tabliczkę czekolady, na przykład zawierającą 5×8 czekoladek. Kawałek czekolady w jednym narożniku jest zatruty.

Gracze na zmianę przecinają czekoladę wzdłuż dowolnej prostej (pionowej lub poziomej) wzdłuż linii oddzielającej poszczególne kawałki, a następnie zjada cześć czekolady bez zatrutego kawałka. Gracz, który zostanie na początku swojej kolejki z zatrutym kawałkiem, przegrywa.

1. Który z graczy (pierwszy czy drugi) ma strategię wygrywającą? Jaka jest ta strategia?
   Wskazówka: Zastanów się, który gracz miałby strategię wygrywającą, jeśli tabliczka miałaby kształt kwadratu?

2. Czy ten sam gracz będzie miał strategię wygrywającą dla tabliczki czekolady o dowolnym rozmiarze?

Zadanie 3 (twierdzenie Zermelo)

Czy poniższe gry zgodnie z Twierdzeniem Zermelo są zdeterminowane?

a) Gra w zapałki z Zadania 1,

b) Gra w papier, kamień, nożyce,

c) Monopoly,

d) Makao,

e) Warcaby,

f) Piłkarzyki.

Zadanie 4 (magiczne karty)

W grze wykorzystuje się kwarty ponumerowane od 1 do 9. Dwóch graczy na zmianę wybiera po jednej karcie. Jeśli gracz pod koniec swojej kolejki będzie miał na ręce trzy karty, które sumują się do 15, to wygrywa. Gra trwa do momentu aż jeden z graczy wygra lub nie pozostanie wiecej kart na stole. Który z graczy ma w tej grze strategię wygrywającą?

Zadanie 5 (gra w podgrupy)

Rozważmy następującą grę dla dwóch graczy. Połóżcie na ławce stos 20 zapałek. Następnie pierwszy gracz dzieli je w dowolny sposób na dwa stosy (np. jeden stos z 15 zapałkami i drugi z 5 zapałkami). Następnie kolejny graczy wybiera dowolny stos i dzieli go na dwa mniejsze stosy. Gracze na zmianę wybierają jeden stos i dzielą go na dwa aż do momentu kiedy nie będzie więcej możliwych ruchów (tzn. na każdym stosie będzie tylko jedna zapałka).

Rozegraj grę z sąsiadem z ławki, a następnie spróbuj odpowiedzieć na poniższe pytania.

- Który gracz ma strategię wygrywającą?

- Jaka jest ta strategia wygrywająca?

Zadanie 6 (Kółko i krzyżyk wersja 2.0)

Rozważmy grę na standardowej planszy do gry w kółko i krzyżyk. W swojej turze gracz stawia dokładnie jedno kółko i dokładnie jeden krzyżyk (Wyjątkiem jest sytuacja, w której zostaje tylko jedno wolne polne na planszy. Wówczas gracz, którego jest tura stawia dowolny symbol w wolne pole.) Grę rozpoczyna gracz pierwszy. Gracz pierwszy wygrywa jeśli w pewnym momencie na planszy znajdą się trzy kółka w jednej linii i wówczas gra się kończy. Gracz drugi wygrywa gdy w jednej linii ułożą się trzy krzyżyki. Jeśli żaden z graczy nie wygrał, a wszystkie pola są zapełnione następuje remis.

a) Czy w tej grze istnieje strategia wygrywająca dla któregoś z graczy?

b) Jeśli odpowiedź w podpunkcie a) jest twierdząca, to który gracz ma strategię wygrywającą i jak ta strategia wygląda?

Zadanie 7 (nieskończone kółko i krzyżyk)

Rozważmy grę w kółko i krzyżyk na nieskończonej kartce w kratkę. Gracze w turach nanoszą kółka i krzyżyki w wolne kratki. Wygrywa gracz, który jako pierwszy ustawi nieprzerwany łańcuch dokładnie pięciu swoich symboli (kółek lub krzyżyków) ciągiem w jednej linii (poziomej, pionowej lub po przekątnej).

Udowodnij, że drugi gracz nie może mieć strategii wygrywającej.

Zadanie 8 (pionek na szachownicy)

Dwóch graczy gra na szachownicy o wymiarze 5×5. Pionek umieszczony jest początkowo w lewym dolnym rogu szachownicy. W każdej turze gracz może przemieścić pionek o jedno lub da miejsca w prawo, lub na pierwsze pole po lewej stronie w rządku wyżej. Przygrywa gracz, który nie może wykonać więcej ruchów.

Który z graczy ma strategię wygrywającą?

Wskazówka: Zacznij od rozważania gry na szacownicy z jedynym rzędem (1×5*).*

Zadanie 9 (szachy 1D)

Rozważ 1-wymiarowy wariant szachów. Biorą w nich udział trzy rodzaje pionków, król, skoczek (koń) i wieża, ustawione początkowo tak jak na ilustracji.

Białe zaczynają. Tak jak w tradycyjnych szachach, gracze w każdej turze mogą przesunąć jedną ze swoich figur.

- Króla można przemieścić się o jedno pole w dowolnym kierunku.
- Skoczka można przesunąć o dwa pola do przodu lub do tyłu, przeskakując przez pionek jeśli znajduje się na jego drodze.
- Wieżę można przesunąć wzdłuż linii prostej na dowolną odległość.

Jeśli pionek skończy ruch na pionku przeciwnika, ten jest zdejmowany z planszy. Wygrywasz kiedy ustawić pionki w takiej pozycji, żeby zagrozić królowi (zaszachować go), i jednocześnie kiedy przeciwnik nie ma możliwości ruchu, który by pozwolił ochronić króla.

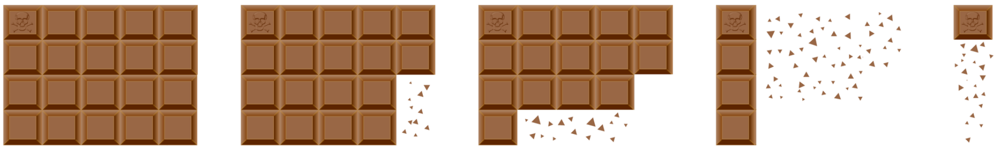
Pokaż, jak gracz biały może zagwarantować sobie zwycięstwo.

Wskazówka: Można to przedstawić graficznie, rozrysowując poszczególne ruchy białego gracza oraz możliwe odpowiedzi gracza czarnego gracza w formie grafu (drzewa).

3 Zadania domowe

Zadanie 10 (2 punkty)

Rozważmy następującą wersję gry w czekoladę. Lewy górny kawałek czekolady jest otruty. Dwóch graczy na zmianę wybiera jeden kawałek czekolady i zjada wszystkie kawałki czekolady znajdujące się w dół i na prawo od danego kawałka (patrz Rysunek 1). Przegrywa gracz, który zostanie z ostatnim zatrutym kawałkiem czekolady.



Rysunek 1: Przykładowa rozgrywka

1. Który gracz ma strategię wygrywającą w przypadku czekolady o wymiarach 2×2? Jaka jest to strategia?
2. Który gracz ma strategię wygrywającą w przypadku czekolady o wymiarach 3×2? Jaka jest to strategia?

Zadanie 11 (2 punkty)

Rozważmy grę w czekoladę z poprzedniego zadania w przypadku kwadratowej czekolady o wymiarach $n \times n$, gdzie n jest pewną liczbą całkowitą. Który gracz ma w tym wypadku strategię wygrywającą? Jaka jest to strategia?

Zadanie 12 (2 punkty)

Rozważmy grę w czekoladę z poprzedniego zadania w przypadku kwadratowej czekolady o wymiarach $2 \times n$, gdzie n jest pewną liczbą całkowitą. Który gracz ma w tym wypadku strategię wygrywającą? Jaka jest to strategia?

Zadanie 13 (2 punkty)

Rozważmy grę w czekoladę z poprzedniego zadania dla czekolady o dowolnym wymiarze $n \times m$. Jest to ciekawy przykład gry, w której można matematycznie udowodnić, który gracz ma strategię wygrywającą, jednak strategia wygrywająca nie jest znana w ogólnym przypadku (podobnie jak w grze *Hex* omówionej na pierwszym wykładzie).

Który z graczy ma zawsze strategię wygrywającą? Udowodnij to twierdzenie.

Wskazówka: Przypomnij sobie argumentację, której użyliśmy w przypadku gry Hex.