

Ćwiczenia 6

Strategie mieszane i twierdzenie Nasha

Projekt „Matematyka dla ciekawych świata”

spisał: Piotr Morawiecki

zadania pochodzą z różnych źródeł

styczeń 2025

1 Podsumowanie wykładu

1.1 Strategie mieszane i twierdzenie Nasha

W **strategiach mieszanych**, graczy określa prawdopodobieństwo, z którym wybiera każdą ze strategii czystych. Przykładem jest strategia gracza w grze w papier, kamień, nożyce, w której gracz wybiera z prawdopodobieństwem $\frac{1}{3}$ papier, z $\frac{1}{3}$ kamień i z prawdopodobieństwem $\frac{1}{3}$ nożyce.

Równowaga Nasha w strategiach mieszanych występuje wtedy, kiedy żaden z graczy nie może zwiększyć wartości oczekiwanej swojej wypłaty poprzez zmianę stosowanej przez niego strategii. Zgodnie z **Twierdzeniem Nasha** każda gra ma co najmniej jedną równowagę Nasha w strategiach czystych lub mieszanych. Twierdzenie to dotyczy to gier o skończonej długości ze skończoną liczbą graczy i strategii.

1.2 Przykład: polowanie na jelenia

Na wykładzie pokazaliśmy, jak znajduje się stany równowagi Nasha w strategiach mieszanych na przykładzie gry ”Polowanie na jelenia”, która jest opisana za pomocą macierzy wypłat przedstawionej poniżej:

		Gracz B	
		Jeleń	Zając
Gracz A	Jeleń	4 / 4	0 / 2
	Zając	2 / 0	2 / 2

Wcześniej pokazaliśmy, że w grze występują dwa stany równowagi Nasha w strategiach czystych: obaj gracze polują na jelenia, oraz obaj gracze polują na zające. Teraz poszukamy stanu równowagi Nasha w strategiach mieszanych.

Oznaczmy prawdopodobieństwo, że gracz A zapoluje na jelenia jako p . Określamy wartość oczekiwaną dla gracza B:

- jeśli zapoluje na jelenia: $E(V_B) = 4p$.
- jeśli na zająca: $E(V_B) = 2$.

W stanie równowagi Nasha w strategii mieszanej obu strategiom powinna odpowiadać ta sama wartość oczekiwana (tylko wówczas gracz nic nie zyska na zmianie strategii czystej na strategię mieszaną). Ten warunek jest spełniony kiedy

$$4p = 2$$

a zatem dla $p = \frac{1}{2}$. Czyli jeśli gracz A poluje na jelenia z prawdopodobieństwem równym $\frac{1}{2}$, to wartość oczekiwana gracza B wyniesie 2, niezależnie od stosowanej przez niego strategii. W analogiczny sposób możemy pokazać, że jeśli gracz B poluje na jelenia z prawdopodobieństwem równym $q = \frac{1}{2}$, to wartość oczekiwana gracza A wyniesie 2 niezależnie od stosowanej

przez niego strategii. Zatem stan, w którym każdy gracz poluje na jelenia z prawdopodobieństwem 50% jest stanem równowagi Nasha. Jest to jedyny w tym przykładzie stan równowagi Nasha w strategiach mieszanych.

Alternatywnie, powyższy wniosek można wyciągnąć zapisując równanie na wartość oczekiwaną dla gracza B w ogólnym przypadku kiedy poluje on na jelenia z prawdopodobieństwem q . Wynosi ona:

$$E(V_B) = 4pq + 2(1 - q)$$

Po przekształceniu otrzymujemy:

$$E(V_A) = 4pq + 2 - 2q = (4p - 2)q + 2$$

Wartość wypłaty dla gracza B jest niezależna od stosowanej przez niego strategii q , kiedy $p = \frac{1}{2}$, co jest zgodne z naszym poprzednim rozumowaniem.

1.3 Zadania

Zadanie 1

Dwóch graczy gra w grę, w której każdy gracz wybiera orła (O) lub reszkę (R). Jeśli obaj gracze dokonają identycznego wyboru, Gracz A wygrywa 1\$ od Gracza B. Jeśli ich wybory są inne, to Gracz B wygrywa 1\$ od Gracza A.

1. Zapisz macierz wypłat w tej grze.
2. Wyjaśnij, czy w tej grze istnieją równowagi Nasha w strategiach czystych.
3. Znajdź stan równowagi Nasha w strategiach mieszanych.
4. Czy jest to jedyny stan równowagi Nasha? Odpowiedź uzasadnij.

Zadanie 2

Zakochana para chciałaby razem spędzić sobotę, ale mają inne preferencje spędzania wolnego czasu. Chłopak woli pójść na mecz piłki nożnej, a dziewczyna woli pójść na balet. Jeśli oboje pójdą na piłkę, chłopak dostanie 2 punkty, a dziewczyna 1 punkt. Jeśli oboje pójdą na balet, to dziewczyna dostanie 2 punkty, a chłopak 1 punkt. Jeśli wybiorą inne zajęcia, to ich wypłata wyniesie 0.

1. Przedstaw tę sytuację za pomocą macierzy wypłat.
2. Określi stany równowagi Nasha w strategiach czystych.
3. Zbadaj czy istnieją stany równowagi Nasha w strategiach mieszanych.
Wskazówka: Każdy z graczy może kierować się inną strategią.

Zadanie 3

Na poprzednich zajęciach omówiliśmy przykład brytyjskiego teleturnieju *Golden Balls*, w którego finale dwóch uczestników musiało podjąć niezależnie od siebie decyzję, czy chcą się podzielić wygraną, czy zabrać całą wygraną dla siebie. Skonstruowaliśmy macierz wypłat (patrz tabela poniżej). Zbadaj występujące w tej grze strategie mieszane.

Zadanie 4

Przypomnijmy sobie przykład z poprzedniej pracy domowej. Adam i Bartek przeprowadzili się do Warszawy i zastanawiają się nad wynajmem mieszkania. Rozważają trzy oferty: małą i średnią kawalerkę lub większe mieszkanie. Mogą się zdecydować na wspólny wynajem mieszkania, albo wynajęcie dwóch różnych mieszkań.

Przedstawmy ich preferencję za pomocą poniższej macierzy wypłat. W każdej komórce, wpłaty po lewej dotyczą Adama, a wypłaty po prawej dotyczą Bartka.

Określ wszystkie cztery możliwe równowagi Nasha w strategiach mieszanych.

Zadanie 5

Rozważmy następującą grę dla dwóch graczy. Każdy z graczy wybiera dowolną liczbę naturalną. Gracz, który wybierze wyższą liczbę wygrywa grę (zdobywa +1 punkt), a gracz, który wybierze niższą liczbę przegrywa (zdobywa -1 punkt). Jeśli obaj gracze wybiorą tę samą liczbę, to gra kończy się remisem (gracze dostają 0 punktów).

1. Czy w tej grze istnieje strategia równowagi Nasha w strategiach czystych?

	B wybiera SPLIT	B wybiera STEAL
A wybiera SPLIT	A wygrywa 5k B wygrywa 5k	A wygrywa 0 B wygrywa 10k
A wybiera STEAL	A wygrywa 10k B wygrywa 0	A wygrywa 0 B wygrywa 0

Tabela 1: Macierz wypłat dla teleturnieju *Golden Balls*

		Bartek wybiera		
		małą kawalerkę	średnią kawalerkę	duże mieszkanie
Adam wybiera	małą kawalerkę	-1, -1	1, 2	1, 0
	średnią kawalerkę	2, 1	0, 0	2, 0
	duże mieszkanie	0, 1	0, 2	3, 3

Tabela 2: Macierz wypłat dla zamieszkania Adama i Bartka

2. Czy w tej grze istnieje strategia równowagi Nasha w strategiach mieszanych?
3. Czy grę tą można opisać za pomocą Twierdzenia Nasha?

grywa wszystkie 18 żetonów w puli. Jeśli jednak Ania ma "dwójkę" to Bartek wygrywa wszystkie 18 żetonów w puli.

Założmy, że Ania i Bartek przyjęli następującą strategię czystą:

- Jeśli Ania dostaje "dwójkę", to zawsze pasuje.
- Jeśli Ania dostaje "asa", to zawsze podwyższa stawkę.
- Bartek, znając strategię Ani, zawsze pasuje kiedy Ania podwyższa stawkę.

Zadanie 6

Ania i Bartek grają w prostą grę hazardową. Na początku gry, Ania i Bartek wpłacają do puli po jednym żetonie.

Następnie Ania losowo ciągnie jedną z dwóch kart, dwójkę lub asa. Ania wie jaką kartę wyciągnęła, jednak nie zdradza tej informacji Bartkowi. Może następnie zdecydować czy chce zwiększyć stawkę, dodając dodatkowe 8 żetonów do puli, czy spasować. Jeśli spasuje, Bartek wygrywa wszystkie żetony w puli (łącznie dwa żetony). W przeciwnym razie to Bartek musi zdecydować czy także chce dodać 8 swoich żetonów do puli, czy chce spasować.

Jeśli Bartek spasuje, to Ania wygrywa wszystkie żetony w puli (9 które łącznie wpłaciła i 1 żeton wpłacony na początku przez Bartka). W przeciwnym razie Ania odsłania swoją kartę. Jeśli Ania miała asa, to ona wy-

1. Ile wynosi wartość oczekiwana wygranej Ani dla powyżej opisanej strategii?
2. Wyjaśnij, dlaczego powyżej opisana strategia nie jest stanem równowagi Nasha.
3. Znajdź stan równowagi Nasha w strategiach mieszanych.
4. Określ, jaka jest wartość oczekiwana wygranej Ani w stanie równowagi Nasha.

2 Praca domowa

Zadanie 7 (1 punkt)

the-surprising-psychology-rock-paper-scissors), w grze w *paper*, *kamień*, *nożyce* w pierwszym

Według statystyk (<https://www.psychologytoday.com/intl/blog/the-blame-game/201504/>) uchu gracze wybierają:

- kamień z prawdopodobieństwem 35%,
- nożyce z prawdopodobieństwem 35%,
- papier z prawdopodobieństwem 30%.

Zakładając, że tę strategię mieszaną stosuje Twój przeciwnik, jaką strategię powinieneś przyjąć? Odpowiedź uzasadnij.

Zadanie 8 (2 punkty)

Pokaż, że w dylemacie więźnia nie ma innych strategii niż strategie czyste.

		Gracz B	
		współpracuje	zdradza
Gracz A	współpracuje	-1 / -1	-10 / 0
	zdradza	0 / -10	-5 / -5

Zadanie 9 (3 punkty)

Rywalizujący piraci Jack i Barbossa odkryli, że dwie sąsiednie wyspy zawierają zakopane skarby. Na pierwszej wyspie znajduje się skrzynia zawierająca 6 sztuk złota. Na drugiej wyspie – skrzynia zawierająca 4 sztuki złota.

Niestety kończą się im zapasy żywności i rumu, więc zdołają popłynąć jedynie na jedną

z tych wysp. Każdy z piratów musi zdecydować niezależnie od drugiego, na którą wyspę popłyną. Jednak jeśli zdecydują się popłynąć na tę samą wyspę, to będą musieli podzielić się po równo wykopanym skarbem.

1. Przedstaw opisaną sytuację za pomocą macierzy wypłat. Wypłatą każdego gracza jest liczba zdobytych sztuk złota.
2. Znajdź wszystkie stany równowagi Nasha w strategiach czystych i mieszanych.

Zadanie 10 (6 punktów)

Rozważmy dwie konkurujące firmy farmaceutyczne, które mogą zainwestować środki w opracowanie szczepionki typu 1, 2 lub 3. Na szczepionkę typu 1 jest największy popyt, ale z kolei firmy wolałyby nie wypuszczać na rynek dwóch podobnych szczepionek, co zmniejszyłoby ich sprzedaż.

Poniższa macierz przedstawia wypłaty dla każdej z firm w zależności od tego, w jaką szczepionkę zainwestuje. W każdej komórce, wypłaty po lewej dotyczą firmy A, a wypłaty po prawej dotyczą firmy B.

Określ wszystkie stany równowagi Nasha w strategiach mieszanych.

		Firma B zainwestuje w		
		szczepionkę 1	szczepionkę 2	szczepionkę 3
Firma A zainwestuje w	szczepionkę 1	2, 2	4, 4	4, 6
	szczepionkę 2	4, 4	2, 2	4, 6
	szczepionkę 3	6, 4	6, 4	3, 3

Tabela 3: Macierz wypłat dla konkurencji firm farmaceutycznych