

# Ćwiczenia 5

## Równowaga Nasha

Projekt „Matematyka dla ciekawych świata”

spisał: Piotr Morawiecki

zadania pochodzą z różnych źródeł

kwiecień 2024

### 1 Podsumowanie wykładu

Na początku wykładu rozważyliśmy dylemat więźnia, dla którego **macierz wypłat** wygląda następująco:

	B współpracuje	B zdradza
A współpracuje	A dostaje 1 B dostaje 1	A dostaje 10 B dostaje 0
A zdradza	A dostaje 0 B dostaje 10	A dostaje 5 B dostaje 5

tym wypadku każdy z graczy skorzystałby na zmianie strategii na zdradę, skracając wyrok z 5 lat do 0. Znajdując stany równowagi Nasha warto narysować strzałki ilustrujące, które zmiany strategii są dla graczy korzystne:

	B współpracuje	B zdradza
A współpracuje	A dostaje 1 B dostaje 1	A dostaje 10 B dostaje 0
A zdradza	A dostaje 0 B dostaje 10	A dostaje 5 B dostaje 5

**Równowagą Nasha** określamy taki profil strategii każdego z graczy, przy którym żaden z graczy nie może podwyższyć swojej wypłaty przez zmianę stosowanej przez niego strategii.

Możemy mieć równowagi Nasha w strategiach czystych lub strategiach mieszanych. **Strategie czyste** to takie strategie, w których gracz wykonuje jedną ustaloną akcję. Przykładem jest strategia gracza, który w dylemacie więźnia zawsze zeznaje.

W tym przykładzie równowagą Nasha jest stan, w którym obaj gracze zdradzają się nawzajem, otrzymując po 5 lat wyroku. Gdyby dowolny z graczy zmienił swoją strategię na współpracę, to dostałby 10 lat wyroku, więc zmiana ta dla każdego z graczy jest niekorzystna.

Zwróć uwagę, że ten stan równowagi Nasha jest mniej korzystny od sytuacji, w której więźniowie by ze sobą współpracowali. Jednak nie jest to stan równowagi Nasha, ponieważ, w

### 1.1 Zadania

#### Zadanie 1

Zagrajcie w następującą grę. Każdy z was musi, bez kontaktowania się z innymi graczami, wybrać liczę rzeczywistą pomiędzy 0 a 100 (z 0 i 100 włącznie). Grę wygrywa gracz, który poda wartość najbliższą  $2/3$  wartości średniej podanych przez pozostałych graczy.

Po rozegraniu gry przedyskutujcie jej wynik, porównując go do stanu równowagi Nasha dla tej gry.

#### Zadanie 2

W brytyjskim teleturnieju „Golden Balls”, dwóch finalistów rywalizowało o główną nagrodę finansową, np. 10 tysięcy funtów. finałowej rozgrywce każdy z nich dostawał do wyboru dwie kule – jedną z napisem „SPLIT”, a drugą z napisem „STEAL”. Każdy z nich musi

niezależnie zdecydować czy chce się podzielić wygraną ze współzawodnikiem, czy też wolą zabrać wszystkie pieniądze dla siebie. Po krótkiej rozmowie z rywalem muszą oni niezależnie od siebie wybierać odpowiednią kulę.

Jeśli obaj gracze wybiorą kulę z napisem *SPLIT*, to każdy z nich dostanie połowę wygranej (5 tysięcy funtów). Jeśli tylko jeden z nich wybierze kulę z napisem *STEAL*, to zgaranie on całą kwotę 10 tysięcy funtów, a drugi gracz odejdzie z niczym. Jednak jeśli obaj gracze zdecydują się ukraść wszystkie pieniądze od rywala, to wówczas tracą całą wygraną.

1. Zagraj w tę grę z innym uczestnikiem. Przed podjęciem decyzji możecie odbyć ze sobą 1-minutową rozmowę i ustalić strategię. Zamiast kuli możesz posłużyć się monetą kładąc ją odpowiednią stroną do góry (orzeł = *SPLIT*, reszka = *STEAL*).
2. Narysuj macierz wypłaty dla każdego z graczy.
3. Określ stany równowagi Nasha w tej grze.

**Ciekawostka:** Zwykle finaliści tego turnieju nawzajem przekonywali rywala do tego, że są chętni podzielić się wygraną, ale nie raz zdarzało się, że mimo zapewnień zawodnicy decydowali się o zabranie całej nagrody dla siebie. Pewnego razu jednak pewien pomysły gracz teleturnieju przechytrzył system. Polecam wam obejrzeć, jak to zrobił na tym filmie: [https://www.youtube.com/watch?v=S0qjK3TWZE8&ab\\_channel=spinout3](https://www.youtube.com/watch?v=S0qjK3TWZE8&ab_channel=spinout3). Zastanów się jak jego strategia wpłynęła na macierz wypłat.

### Zadanie 3

Chłopak i dziewczyna nie mogą się dogadać, w jaki sposób spędzą sobotę. Rozważają trzy opcje: pójść na balet, pójść na mecz lub zostać w domu. Chłopak najchętniej poszedłby na mecz, a dziewczyna na balet, ale najchętniej spędziliby czas razem.

Przedstawmy tę sytuację za pomocą następującej macierzy wypłat. W każdej komórce wypłaty po lewej dotyczą dziewczyny, a wypłaty po prawej dotyczą chłopaka.

		Chłopak wybiera		
		balet	mecz	dom
Dziewczyna wybiera	balet	4, 2	1, 1	0, 0
	mecz	1, 1	2, 4	1, 0
	dom	0, 0	0, 1	1, 1

Jakie są stany równowagi Nasha w strategiach czystych?

### Zadanie 4

Teoria gier znajduje zastosowania przy opisywaniu interakcji między firmami. Rozważmy dwie konkurujące firmy farmaceutyczne, które mogą zainwestować środki w opracowanie leku 1, 2 lub 3. Poniższa macierz przedstawia wypłaty dla każdej z firm w zależności od tego, w jaki lek zainwestuje. W każdej komórce, wypłaty po lewej dotyczą firmy A, a wypłaty po prawej dotyczą firmy B.

		Firma B opracowuje		
		lek 1	lek 2	lek 3
Firma A opracowuje	lek 1	3, 3	6, 4	6, 2
	lek 2	4, 6	2, 2	4, 2
	lek 3	2, 6	2, 4	1, 1

Określ stany równowagi Nasha w strategiach czystych. Jakie wnioski można stąd wyciągnąć?

### Zadanie 5

W ekonomii, poza poznany na wykładzie pojęciem równowagi Nasha, często używa się pojęcia efektywności w sensie Pareta. Mówimy, że stan gry jest *optymalny w sensie Pareto*, jeśli nie jest możliwa zmiana strategii stosowanych przez graczy, przy której co najmniej jeden gracz osiągnie wyższą wypłatę, oraz wypłata żadnego z pozostałych graczy nie ulegnie zmniejszeniu.

Określ, które stany są optymalne w sensie Pareto w:

- a) dylemacie więźnia,

- b) grze w dobra publiczne,
- c) sposobie na spędzenie soboty z *Zadania 3*.
- d) konkurencji między firmami farmaceutycznymi z *Zadania 4*.

## Zadanie 6

W tym zadaniu za pomocą teorii gier opiszemy wybory prezydenckie. Graczami będą obywatele, którzy mogą zdecydować czy chcą pójść oddać głos w wyborach, czy nie. Wygrywa kandydat, na którego zostanie oddane więcej głosów.

Założmy, że mamy łącznie  $N$  graczy, spośród których dokładnie połowa popiera kandydata A i połowa popiera kandydata B. Wpłata dla każdego gracza jest uzależniona od tego kto wygra wybory:

- jeśli popierany przez nas kandydat wygra wybory dostajemy +10 punktów,
- jeśli popierany przez nas kandydat przegra wybory dostajemy -10 punktów,
- w przypadku remisu dostajemy 0 punktów.

Ponadto wszyscy gracze, którzy pójdą zagłosować, dostają dodatkowo -1 punkt ze względu na fatywę.

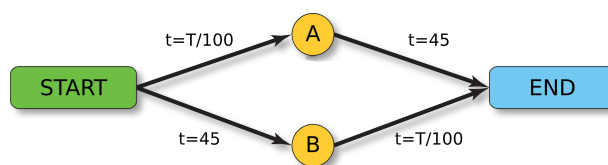
1. Zbadaj istniejące stany równowagi Nasha w tej grze.
2. Czy ten sam stan/y równowagi Nasha wystąpi/ą, jeśli kandydat A będzie popierany przez więcej graczy niż kandydat B?

## Zadanie 7

Teorię gier można zastosować do opisu tras wybieranych przez kierowców, co może pomóc w planowaniu rozbudowy sieci drogowej.

Rozważmy następujący scenariusz. Codziennie 4000 kierowców chce się przemieścić

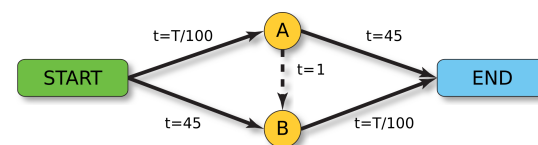
między dwoma miastami połączonymi dwiema drogami. Część tych dróg jest bardzo szeroka, i czas jazdy nimi nie zależy od liczby samochodów – wynosi on 45 minut. Na pozostałym odcinku droga jest wąska i przy dużym natężeniu ruchu samochody muszą zwalniać. Czas przejazdu tą drogą można obliczyć ze wzoru  $\frac{T}{100}$ , gdzie  $T$  to liczba kierowców, która zdecyduje się przejechać tą drogą. Sieć dróg przedstawia Schemat A.



Schemat A

Kierowców można traktować jako graczy, a akcjami w tej grze jest wybór trasy. Przyjmij, że każdy z kierowców wybiera trasę, w taki sposób, aby przejechać z jednego miasta do drugiego w jak najkrótszym czasie.

1. Jaki jest stan równowagi Nasha w tej grze? Ile zajmuje przejazd między miastami dla tego stanu?
2. W celu skrócenia czasu przejazdu, planowane jest otwarcie utworzenie dodatkowego połączenia ekspresowego między trasami, łączącego punkt A i B, jak na Rysunku ???. Samochody będą mogły przejechać tą trasą między punktem A i B w stałym czasie równym 1 minucie.



Schemat B

## Zadanie 8

Rozważ następującą macierz wypłat, gdzie  $x$  jest pewną liczbą rzeczywistą.

		Gracz B	
		akcja 1	akcja 2
Gracz A	akcja 1	0, 0	$x + 2, x + 1$
	akcja 2	$x - 2, x - 1$	1, 1

Dla jakich wartości parametru  $x$  występują dokładnie dwa stany równowagi Nasha w strategiach czystych?

## Zadanie 9

Skonstruuj macierz wypłaty o wymiarze  $2 \times 2$  z parametrem  $x$ , taką, że w zależności od wartości parametru  $x$  w strategiach czystych występują: 2 stany równowagi Nasha, 1 stan równowagi Nasha i 0 stanów równowagi Nasha.

## Zadanie 10

Rozważmy grę, w której dwóch graczy rozgrywa 100 razy grę w dylemat więźnia. Gracze dążą do osiągnięcia jak najwyższej łącznej wypłaty we wszystkich grach. W każdej rundzie gracze mogą podejmować decyzję na bazie poprzednich rund. Obaj gracze wiedzą, że gra skończy się po 100 rundach.

Czy zwiększenie liczby rund do 100 wpływa na strategię dla stanu równowagi Nasha? Odpowiedź uzasadnij.

## 2 Praca domowa

### Zadanie 11 (1 punkt)

Adam i Bartek przeprowadzili się do Warszawy i zastanawiają się nad wynajmem mieszkania. Rozważają trzy oferty: małą i średnią kawalerkę lub większe mieszkanie. Mogą się zdecydować na wspólny wynajem mieszkania, albo wynajęcie dwóch różnych mieszkań.

Przedstawmy ich preferencję za pomocą poniższej macierzy wypłat. W każdej komórce, wypłaty po lewej dotyczą Adama, a wypłaty po prawej dotyczą Bartka.

		Bartek wybiera		
		małą kawalerkę	średnią kawalerkę	duże mieszkanie
Adam wybiera	małą kawalerkę	-1, -1	1, 2	1, 0
	średnią kawalerkę	2, 1	0, 0	2, 0
	duże mieszkanie	0, 1	0, 2	3, 3

Określ wszystkie stany równowagi Nasha w strategiach czystych.

### Zadanie 12 (1 punkt)

Określ, które stany są optymalne w sensie Pareto (patrz *Zadanie 7*) w sytuacji opisanej w poprzednim zadaniu.

### Zadanie 13 (2 punkty)

Rozważmy konkurs, w którym każdy z dwóch graczy niezależnie od siebie wybiera liczbę pomiędzy 0 a 100. Obaj gracze dostają liczbę punktów równą niższej z podanych przez nich wartości. Ponadto gracz, który poda wyższą wartość, musi oddać drugiemu 2 swoje punkty. Określ stany równowagi Nasha w tej grze.

### Zadanie 14 (3 punkty)

Rozważ następującą macierz wypłat, gdzie  $x$  jest pewną liczbą rzeczywistą.

		Gracz B	
		akcja 1	akcja 2
Gracz A	akcja 1	2, 2	$x, -1$
	akcja 2	$1 - x, 1$	0, 0

Dla jakich wartości parametru  $x$  występuje dokładnie jeden stan równowagi Nasha w strategiach czystych?

### Zadanie 15 (3 punkty)

Rozważ zmodyfikowane zadanie 7 podpunkt B, w którym czas przejazdu z punktu A do punktu B wynosi 10 minut. Opisz nowy stan równowagi Nasha. Ile czasu zajmuje kierowcom przejazd z punktu A do punktu B?