Ćwiczenia 4
Wprowadzenie do teorii gier

Projekt „Matematyka dla ciekawych świata”
spisał: Piotr Morawiecki
zadania pochodzą z różnych źródeł

kwiecień 2025

1 Podsumowanie wykładu

1.1 Wprowadzenie do teorii gier

W kontekście teorii gier, za pomocą pojęciem "gier" opisuje się sytuacji konfliktu/kooperacji pomiędzy jej uczestnikami. Niezbędnymi elementami gier są:

- **gracze** (co najmniej dwóch), którzy będą podejmować decyzje o wyborze akcji w grze,
- **akcje**, pomiędzy którymi gracze mogą wybierać, oraz
- funkcja **wypłaty**, która określa wynik każdego z graczy w zależności od wybranych przez nich akcji.

Przykładem może być gra w "paper, kamień, nożyce", w której mamy dwóch graczy, którzy podejmują decyzję o tym czy pokazać papier, kamień czy nożyce. Ich możliwymi strategiami jest na przykład wybór kamienia (tzw. strategia czysta), albo wybór papieru, kamienia i nożyc z równym prawdopodobieństwem (tzw. strategia mieszana). Wypłatą gracza może być +1, jeśli wygrają grę, −1 jeśli przegrają grę, lub 0 jeśli zremisują.

W tym przykładzie suma wypłat obu graczy zawsze sumuje się do zera. Takie gry nazywamy grami o **sumie zerowej**.

1.2 Typy gier

Na wykładzie wyróżniliśmy dwa typy gier:

- **Gry w postaci normalnej**, w których gracze wykonują ruchy jednocześnie nie znając akcji wybranych przez pozostałych graczy (np. papier, kamień, nożyce). Takie gry przedstawia się zwykle za pomocą tzw. macierzy wypłat:

		Gracz A		
		papier	nożyce	kamień
Gracz B	papier	$0, 0$	$-1, 1$	$1, -1$
	nożyce	$1, -1$	$0, 0$	$-1, 1$
	kamień	$-1, 1$	$-1, 1$	$0, 0$

- **Gry w postaci ekstensywnej**, w których gracze wykonują akcje po kolei, znając akcje wykonane przez pozostałych graczy (np. gra w kółko i krzyżyk). Gry takie przedstawia się zwykle za pomocą tzw. drzewa gry:

1.3 Strategia minimax

W przypadku gier sekwencyjnych o sumie zerowej najlepszą strategią jest tzw. strategia minimax. Polega ona na wyborze takich akcji, dla których minimalizujemy maksymalne możliwe straty (lub maksymalizujemy minimalny zysk). Przykładowo w grze opisanej za pomocą następującej macierzy wypłat:

Gracz A		Gracz B: broń zamku	Gracz B: uciekaj
	atak na zamek	0 / 0	3 / -3
	plądruj miasto	1 / -1	1 / -1

Jeśli gracz A wykona akcje *plądruj miasto*, to najniższa wypłata, którą może uzyskać, wynosi +1. W przypadku wyboru akcji *atak na zamek* wynosi ona 0. Zatem strategią minimax dla gracza A jest akcja plądrowania.

Spójrzmy na tą grę z punktu widzenia gracza B. Jeśli gracz B wykona akcje *broń zamek*, to najniższa wypłata, którą może uzyskać, wynosi −1. W przypadku wyboru akcji *opuść zamek* wynosi ona −3. Zatem strategią minimax dla gracza B jest akcja broń zamek.

W obu przykładach dochodzimy do strategii, w której gracz A otrzymuje wypłatę +1, a gracz B wypłatę −1. Zgodnie z tzw. *twierdzeniem minimax*, ta zbieżność występuje dla wszystkich gier o sumie zerowej.

1.4 Algorytm minimax

Strategię minimax można zastosować również dla gier w postaci ekstensywnej. Wówczas można znaleźć optymalną strategię, stosując tzw. *Algorytm minimax.* Każdemu możliwemu stanu gry przyporządkowujemy wynik gry dla stanu, który jest najlepszy dla gracza, który będzie wówczas wykonywać akcję.

Na wykładzie przedstawiliśmy działanie algorytmu minimax na przykładzie gry *atak piratów*, opisanej za pomocą następującego drzewa gry:

Stosując iteracyjnie algorytm minimax uzyskaliśmy następujący wynik dla każdego stanu w grze, co pozwoliło określić optymalną strategię prowadzącą do wyniku $-1/+1$:

2 Zadania

Zadanie 1

Przedyskutuj czy następujące sytuację można opisać jako *gry* w kontekście teorii gier:

a) gra karciana w wojnę,

b) warcaby,

c) pasjans,

d) gra Minecraft,

e) konkurujące ze sobą sklepy w centrum handlowym,

f) wybór lokalu do zjedzenia lunchu ze znajomymi,

g) zwierzęta żyjące na obszarze jednego ekosystemu.

W każdym z powyższych przypadków spróbuj określić funkcję wypłaty.

Zadanie 2

Rozważmy prostą grę w kości. Będą w niej potrzebne trzy kości:

- **czerwona**, na której ściankach są dwie trójki, dwie czwórki i dwie ósemki,
- **żółta**, na której ściankach są dwie jedynki, dwie piątki i dwie dziewiątki,
- **niebieska**, na której ściankach są dwie dwójki, dwie szóstki i dwie siódemki.

Każdy z graczy wybiera jedną z tych kości, a następnie nimi rzucają. Wygrywa gracz, na którego kostce wypadnie więcej oczek.
Bartek, grając ze swoją siostrą Anią, pozwolił jej jako pierwszej wybrać kostkę.

1. Kto będzie miał w tej grze strategię wygrywającą?
2. Jakie jest prawdopodobieństwo wygranej Ani, jeśli oboje gracze stosują strategię minimax?

Zadanie 3

Dwóch rycerzy, Artur i Baltazar, odnalazło w zdobytym zamku skrzynię ze stoma złotymi monetami. Ich król zdecydował, że Artur jako starszy rycerz zdecyduje o podziale monet pomiędzy siebie i Baltazara. Jednak król jednocześnie zaznaczył, że jeśli Baltazar będzie niezadowolony z podziału majątku, jaki zaproponuje Artur, to król rekwiruje cały skarb dla siebie.

1. Zagraj w tę grę z innym członkiem grupy. Zdecydujcie się, kto będzie Arturem, dokonującym podziału majątku, a kto Baltazarem, przyjmującym lub odrzucającym zaproponowany podział.
2. Jaka jest strategia minimax w opisanej sytuacji? W jaki sposób Artur powinien podzielić majątek?

Zadanie 4

Rozważmy następującą grę dla dwóch graczy. Mamy dwa pudełka. W jednym znajdują się dwie zapałki, a w drugim trzy zapałki. Podczas swojej tury gracz może usunąć dowolną liczbę zapałek z jednego pudełka. Wygrywa gracz, który zmusi przeciwnika do wzięcia ostatniej zapałki.

1. Uzasadnij, dlaczego jeden z graczy będzie miał strategię, która zagwarantuje mu wygraną.
2. Za pomocą odpowiedniego drzewa rozstrzygnij, który gracz ma strategię wygrywającą. Znajdź dla niego optymalną strategię gry.

Ciekawostka: Jest to prosty przykład tzw. gry Nim. Istnieje bardzo ciekawy (i dość złożony) matematyczny dowód na to, który gracz ma strategię wygrywającą w tę grę. Niestety leży on poza zakresem naszego programu. Zainteresowanym polecam artykuł `https://pl.wikipedia.org/wiki/Nim`.

Zadanie 5 (gra w kiełki)

Na kartce papieru narysuj pewną liczbę n punktów (np. $n = 3$). Gracze grają na zmianę. W każdej turze gracz rysuje linię (prostą lub krzywą) zaczynającą się i kończącą w wybranych punktach (można również zacząć i skończyć rysować linię w dwóch różnych punktach), a następnie umieszcza na tej linii dodatkowy punkt.

Linie nie mogą się przecinać, a z jednego punktu nie mogą wychodzić więcej niż 3 linie. Przegrywa gracz, który nie będzie mógł narysować linii łączącej punkty.

1. Rozegraj grę z partnerem z ławki dla dwóch początkowych punktów.
2. Jaka jest największa liczba ruchów, po których gra się zakończy, dla danego n?
3. Który z graczy ma strategię wygrywającą dla jednego początkowego punktu ($n = 1$)?
4. Poniższy graf przedstawia drzewo gry dla dwóch punktów startowych. Który z graczy wygra, jeśli gracze stosują strategię minimax?

Ciekawostka: Mimo prostych zasad nawet komputery mają problem ze znajdowaniem optymalnej strategii w tej grze dla dużej liczby punktów początkowych. Do 2011 roku udało się z wykorzystaniem komputerów znaleźć optymalną strategię do $n = 44$ punktów startowych (źródło `https://en.wikipedia.org/wiki/Sprouts_(game)`).

Zadanie 6

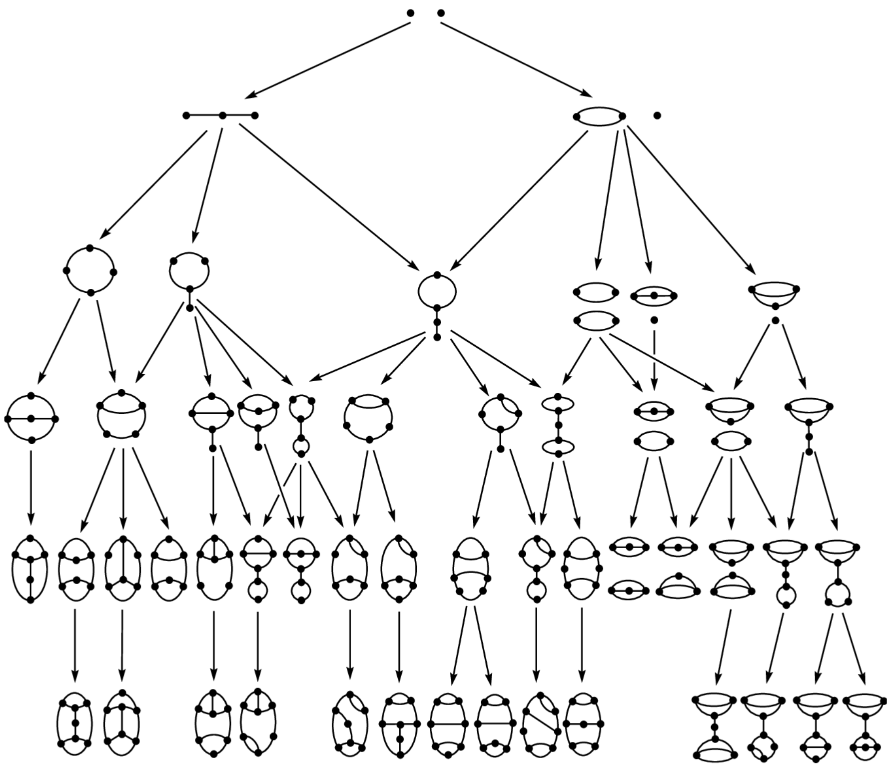
Rozważmy odmienną wersję gry w *atak na zamek*, w której gracze broniący się może bronić zamku lub wystawić armię przed zamek i bronić miasta.

		Gracz B	
		broń zamku	broń miasta
Gracz A	atak na zamek	0 / 0	3 / -3
	plądruj miasto	2 / -2	1 / -1

Jako $V(a,b)$ oznaczmy wypłatę gracza A, przy założeniu, że gracz A wykonał akcję a, a gracz B wykonał akcję b. Sprawdź, czy dla tej gry warunek minimax,

$$\max_{a \in \text{strategie gracza A}} \left(\min_{a \in \text{strategie gracza B}} V(a,b) \right) = \min_{b \in \text{strategie gracza B}} \left(\max_{a \in \text{strategie gracza A}} V(a,b) \right)$$

jest spełniony.



Rysunek 2: Drzewo gry w kiełki dla $n = 2$. Źródło: Applegate, David L. et al. "*Computer analysis of Sprouts.*" (1999).

3 Praca domowa

Zadanie 7 (1 punkt)

Chodzenie do szkoły można analizować jako grę. Określ:

a) Kim mogą być gracze?

b) Jakie mogą mieć możliwe akcje?

c) W jaki sposób można określić wypłatę dla każdego gracza?

Zadanie 8 (2 punkty)

1. Narysuj drzewo gry dla gry w kółko i krzyżyk, przy następującej pozycji początkowej (teraz jest ruch kółka).

2. Zastosuj algorytm minimax do narysowanego drzewa, w ten sposób znajdując strategię minimax dla każdego z graczy.

	O	X
		X
O	X	O

Zadanie 9 (3 punkty)

Pięciu racjonalnych piratów (w kolejności starszeństwa Axe, Butler, Cavendish, Drake i Easton) znalazło skrzynię, w której znajduje się 100 złotych monet. Teraz muszą zdecydować jak się monetami podzielić. Oczywiście każdy chce dostać jak najwięcej dla siebie.

Według kodeksu piratów to najstarszy pirat proponuje podział łupów. Jeśli co najmniej połowa piratów przyjmie zaproponowany podział łupów, to monety są dzielone zgodnie z planem i na tym gra się kończy. Jeśli jednak większość piratów odrzuci propozycję, to najstarszy pirat jest wyrzucany za burtę, a kolejny w kolejności starszeństwa pirat może zaproponować nowy podział łupów. Gra jest kontynuowana aż do momentu kiedy plan podziału łupów zostanie zaakceptowany.

Jaki podział łupów powinien zaproponować najstarszy pirat Axe, żeby ujść z życiem i dostać jak najwięcej monet?
Wskazówka: Rozważ na początku mniejszą liczbę piratów.