Ćwiczenia 3
Wartość oczekiwana i Prawo Wielkich Liczb

Projekt „Matematyka dla ciekawych świata”
spisał: Piotr Morawiecki
zadania pochodzą z różnych źródeł

marzec 2025

1 Podsumowanie wykładu

Wartość oczekiwana

Rozważmy doświadczenie losowe, którego możliwym wynikom przyporządkowujemy wartość liczbową. Przykładowo w rzucie kością do gry, wynikiem może być liczba oczek na wyrzuconej ściance.

Wartością oczekiwaną tego doświadczenia określa się średnią wartość, jakiej możemy się spodziewać po wykonaniu bardzo dużej liczby jego powtórzeń.

Oznaczmy możliwe wyniki doświadczenia X jako $x_1, x_2, \ldots, x_n$, a prawdopodobieństwo ich zajścia jako $P(X = x_1), P(X = x_2), \ldots, P(X = x_n)$. Wartość oczekiwaną wyniku X oznacza się jako $E(X)$ i możemy obliczyć ją sumując wszystkie możliwe wyniki, każdy pomnożony przez prawdopodobieństwo jego wystąpienia:

$$E(X) = x_1 \cdot P(X = x_1) + x_2 \cdot P(X = x_2) + \ldots + x_n \cdot P(X = x_n).$$

Przykładowo, wartość oczekiwana liczby wyrzuconych oczek wynosi:

$$E(X) = 1 \cdot \frac{1}{6} + 2 \cdot \frac{1}{6} + 3 \cdot \frac{1}{6} + 4 \cdot \frac{1}{6} + 5 \cdot \frac{1}{6} + 6 \cdot \frac{1}{6} = \frac{21}{6} = 3.5$$

Prawo Wielkich Liczb

Zgodnie z tzw. **Prawem Wielkich Liczb**, gdy liczba prób losowego doświadczenia dąży do nieskończoności, średnia arytmetyczna wyników tych prób dąży do jej wartości oczekiwanej.

Zatem średnia liczba oczek, które wypadają podczas wielokrotnego rzutu kością powinna wraz ze wzrostem liczby rzutów zbiegać do 3.5.

Dokładniej to prawo jest badane na pracowni komputerowej.

2 Zadania

Zadanie 1

Za 1 złotówkę możesz zagrać w "rzut kością do gry". Jeśli wypadnie 5 wygrasz 2 złote, a jeśli wypadnie 6 wygrasz 5 złotych.

a) Jaka jest wartość oczekiwana zysku w tej grze?

b) Początkowo miałeś w portfelu **60 złotych**. Jaka jest wartość oczekiwana wartości twojego portfela po rozegraniu 60 rzutów kością?

c) Czy możesz tą samą metodą co w poprzednim zadaniu obliczyć wartość oczekiwaną wartości Twojego portfela po rozegraniu 60 rzutów kością, jeśli w Twoim portfelu jest początkowo **30 złotych**? Wyjaśnij dlaczego tak/nie.

Zadanie 2

W tradycyjnej ruletce znajduje się 37 pól, 18 czerwonych, 18 czarnych i 1 zielone. Po zakręceniu ruletką metalowa kulka lądowała na losowym polu.

Gracz może między innymi postawić stawkę na czerwone lub na czarne pola. Wówczas w przypadku wylądowania kulki na poprawnym kolorze, gracz wygrywa postawioną stawkę. W przeciwnym razie przegrywa on stawkę.

a) Hazardzista Harry postawił 100 złotych na pola czerwone, jaka jest wartość oczekiwana jego wygranej?

b) Harry po otrzymaniu wypłaty postanowił rozegrać łącznie 100 rund ruletką. Jaka jest wartość oczekiwana wartości jego wygranej/przegranej po ich rozegraniu? Jaka jest wartość oczekiwana zarobków kasyna?

c) Gracze mogą też postawić stawkę na pole zielone. W przypadku wylądowania kulki na polu zielonym wygrywają oni 35-krotność postawionej stawki. Czy bardziej opłaca się obstawiać pola zielone, czy czerwone/czarne? Przedyskutujcie to ze sobą.

Zadanie 3

Rozważmy grę, której rzucamy dwiema standardowymi kośćmi do gry. Jeśli suma oczek na obu kościach wyniesie 7, to gracz wygrywa x, a w przeciwnym wypadku przegrywa złotówkę. Ile powinien wynosić x, żeby wartość oczekiwana w tej grze była dodatnia?

Zadanie 4

Rozważmy grę w rzut monetą. Przed każdym rzutem gracz wybiera stawkę, o którą chce grać. Jeśli wypadnie orzeł, wygrywa on wybraną stawkę. Jeśli wypadnie reszka, to przegrywa on stawkę.

Jeremi wpadł na pomysł jak zagwarantować sobie wygraną. Na początku zagra on o złotówkę, a w każdej kolejnej grze będzie zwiększać stawkę dwukrotnie aż do momentu kiedy nie wygra.

a) Pokaż, że niezależnie od liczby przegranych rzutów, po wyrzuceniu orła Jeremi zarobi więcej niż łącznie przegrał we wszystkich poprzednich rzutach.

b) Czy to oznacza, że wartość oczekiwana przy strategi Mieszka jest dodatnia?

Zadanie 5

Rozważmy następującą grę. Na początku w puli znajduje się 1 zł. Następnie kolejno rzucamy monetą. Jeśli wypadnie reszka, powiększamy dwukrotnie wartość puli (tzn. po pierwszym rzucie zwiększamy ją do 2 zł, po drugim rzucie do 4 zł itd.). Jeśli wypadnie orzeł, to gra się kończy, a Ty dostajesz wszystkie pieniądze z puli.

1. Jaka jest wartość oczekiwana wygranej w tej grze?

2. Ile byłbyś w stanie zapłacić, żeby wziąć udział w tej grze?

Zadanie 6

Rozważmy następującą grę. Dwóch graczy porównuje zawartość swoich portfeli. Gracz z mniejszą liczbą pieniędzy odstaje wszystkie pieniądze od drugiego gracza.

Zwróć uwagę, że potencjalna wygrana dla każdego z graczy jest zawsze wyższa niż ewentualna przegrana. Bystry Jack uważa, że skoro wartość oczekiwana jest zatem dodatnia, to zawsze opłaca się grać w tę grę. Czy Jack ma rację?

Zadanie 7

1. Pijany pingwin stoi w odległości jednego kroku krawędzi kry. Z prawdopodobieństwem 50% robi krok w kierunku krawędzi, a z prawdopodobieństwem 50% robi krok w kierunku przeciwnym. Jakie jest prawdopodobieństwo, że w końcu spadnie z krawędzi kry do wodny?

2. Przedyskutuj, jak zmieni się odpowiedź na poprzednie zadanie, jeśli pingwin stanie w odległości 10 kroków od krawędzi kry.

Zadanie 8

1. Akcje pewnego przedsiębiorstwa są dzisiaj warte 1 PLN. Przewidujesz, że będą one codziennie rosnąć o 1 PLN z prawdopodobieństwem 60%, lub spadać o 1 PLN z prawdopodobieństwem 40%. Jakie jest prawdopodobieństwo, że w końcu akcje spadną do 0?

2. Okazało się, że akcje tego przedsiębiorstwa wzrosły do 10 PLN. Jakie jest teraz prawdopodobieństwo, że akcje kiedyś spadną do 0?

Zadanie 9

Kupiłeś srebro warte 1000 złotych. Wartość tego złota codziennie wzrasta o 10 PLN z prawdopodobieństwem 50%, lub spada o 10 PLN z prawdopodobieństwem 50%.

Zdecydowałeś się to srebro od razy sprzedać kiedy albo jego wartość spadnie do 500 PLN, albo kiedy jego wartość osiągnie 1200 PLN. Oblicz prawdopodobieństwo, że uda ci się sprzedać to srebro za 1200 PLN.

Zadanie 10

Do opisywania rozrzutu wyników doświadczenia losowego X wykorzystuje się tzw. wariancję. Jest ona zdefiniowana jako:

$$\mathrm{Var}(X) = E\left((X-\mu)^2\right),$$

gdzie jako $\mu = E(X)$ oznaczyliśmy wartość oczekiwaną zdarzenia.

1. Pokaż, korzystając z definicji wartości oczekiwanej, że wariancję można także zapisać jako:
$$\mathrm{Var}(X) = E\left(X^2\right) - \left(E\left(X\right)\right)^2$$

2. Pokaż, wykorzystując tożsamość wyprowadzoną w poprzednim podpunkcie, że dla każdego zdarzenia losowego spełniona jest nierówność:
$$E\left(X^2\right) \geq \left(E\left(X\right)\right)^2.$$

3. Jaką własność musi spełniać zdarzenie X, żeby spełniona była poniższa równość?
$$E\left(X^2\right) = \left(E\left(X\right)\right)^2$$

3 Praca domowa

Zadanie 11 (1 punkty)

Wylosowujesz dwie losowe karty ze standardowej talii 52 kart. Jeśli wypadną dwie karty o tej samej wartości (np. dwie czwórki, albo dwa walety), to wygrywasz 10 punktów. Jeśli wypadną dwie różne karty, to przegrywasz 1 punkt. Jaka jest wartość oczekiwana w tej grze.

Zadanie 12 (2 punkty)

Jesteś łowcą skarbów, który eksploruje dżunglę z mapą, na której są zaznaczone trzy potencjalne lokalizacje skarbów. W każdej lokacji znajduje się zakopana skrzynia, ale możesz wykopać tylko jedną z nich.

- W lokacji A z prawdopodobieństwem 50% znajdziesz 300 złotych monet, z prawdopodobieństwem 30% znajdziesz 1000 złotych monet, a z prawdopodobieństwem 20% w skrzynie nie będzie żadnych monet.
- W lokacji B z prawdopodobieństwem 60% znajdziesz 400 złotych monet, a z prawdopodobieństwem 40% znajdziesz 600 złotych monet.
- W lokacji B z prawdopodobieństwem 80% znajdziesz 100 złotych monet, a z prawdopodobieństwem 20% znajdziesz 2000 złotych monet.

Gdzie najlepiej jest zacząć kopać? Odpowiedź uzasadnij.

Zadanie 13 (2 punkty)

Rozważmy grę, której rzucamy dwiema standardowymi kośćmi do gry. Jeśli suma oczek na obu kościach wyniesie 5, to gracz wygrywa x, a w przeciwnym wypadku przegrywa złotówkę. Ile powinien wynosić x, żeby wartość oczekiwana w tej grze była dodatnia?

Zadanie 14 (3 punkty)

Rozważmy zmodyfikowaną grę z Zadania 5. Powiedzmy, że grę zaoferował Ci miliarder, który postawił dodatkowy warunek: Jeśli twoja wygrana przekroczy miliard złotych, to gra się automatycznie zakończy. Jaka jest wartość oczekiwana wygranej w tej grze?