Sygnały 2 – Sygnały dyskretne, transformata Fouriera, filtry FIR

Projekt „Matematyka dla Ciekawych Świata - edycja XV BIS”
Krzysztof Lasocki

2024-07-22

1 Transformata Fouriera

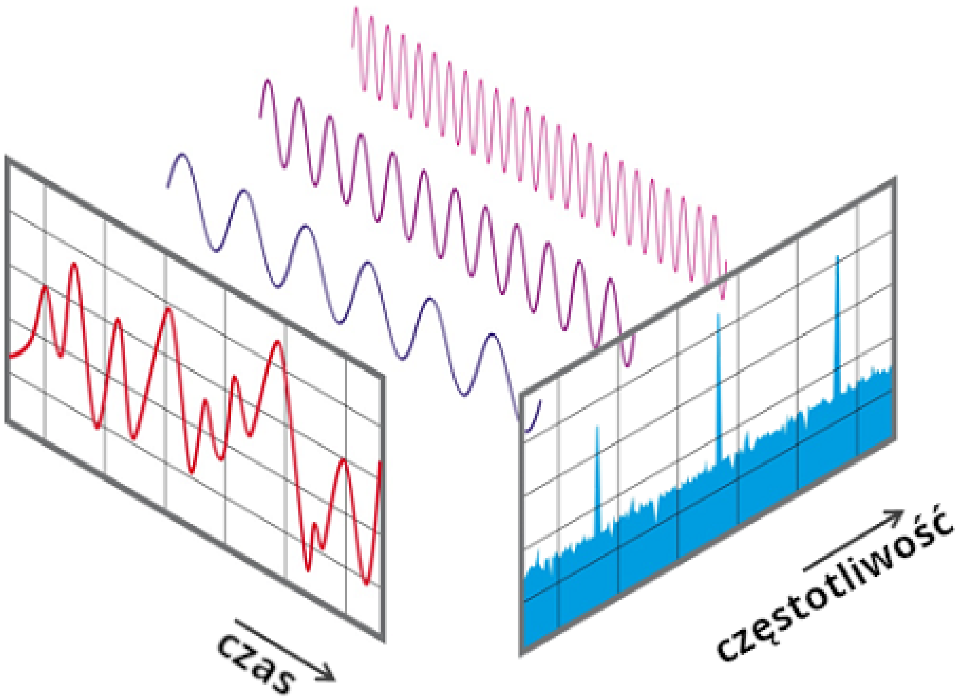
Jak wiesz, dźwięki mogą składać się z kilku częstotliwości harmonicznych (zob. przykład drgającej struny w poprzednim skrypcie). Matematycznym narzędziem, które pozwala badać „skład" dźwięków ze względu na ich częstotliwości składowe jest **szereg Fouriera**. Szereg Fouriera pozwala przedstawić dowolną funkcję okresową jako sumę sinusów i cosinusów o różnych amplitudach i częstotliwościach.

Rzeczywiste dźwięki nie są idealnymi funkcjami okresowymi - dlatego, że mają skończony czas trwania. Uogólnieniem idei szeregu fouriera na funkcje, które nie są okresowe jest **transformacja Fouriera**[1], która mówi jakie częstotliwości składowe posiada dana funkcja.

$$F(k) = \mathfrak{F}\{f(x)\} \tag{1}$$

Wynikiem transformacji Fouriera jest funkcja X, zwana **widmem funkcji** x. Widmo funkcji informuje nas o tym, z jakich częstotliwości, w jakich proporcjach i jakich fazach składa się funkcja. Przyporządkowuje częstotliwości k współczynniki $X(k)$.

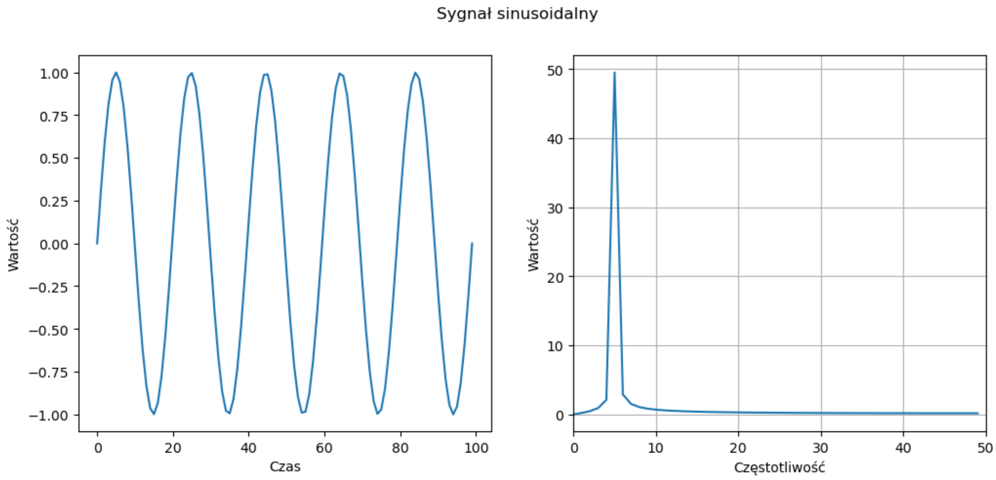
Transformacja Fouriera pozwala rozłożyć dowolny sygnał na jego składowe częstotliwości. W przypadku sygnału dyskretnego, ograniczonego w czasie, czyli takiego z jakim działamy, wykonuje się pokrewne działanie matematyczne zwane **dyskretną czasową transformacją Fouriera** (ang. *Discrete-time Fourier Transform*, DTFT). DTFT to działanie podobne do transformacji Fouriera z taką różnicą, że zamiast nieograniczonej ciągłej funkcji $f(x)$ działa na ograniczonej dyskretnej funkcji $f[x]$.

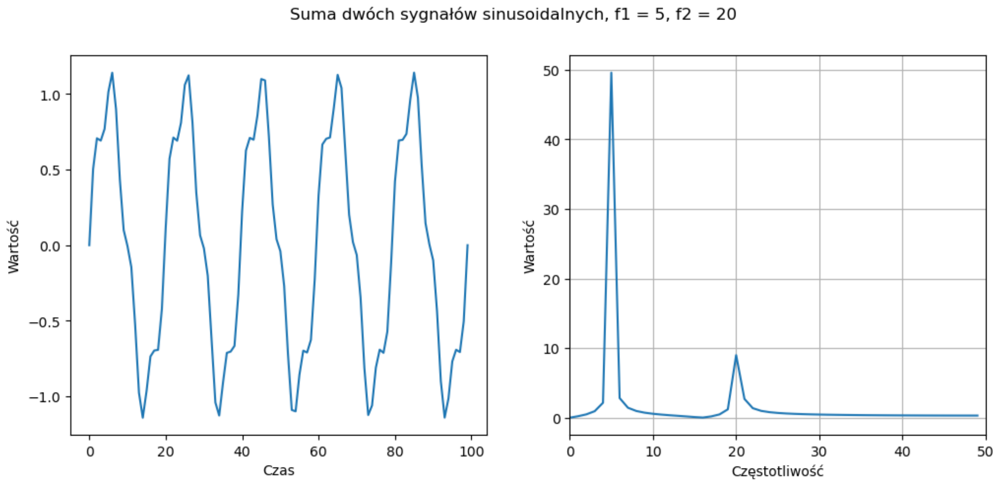


1.1 Widma różnych sygnałów

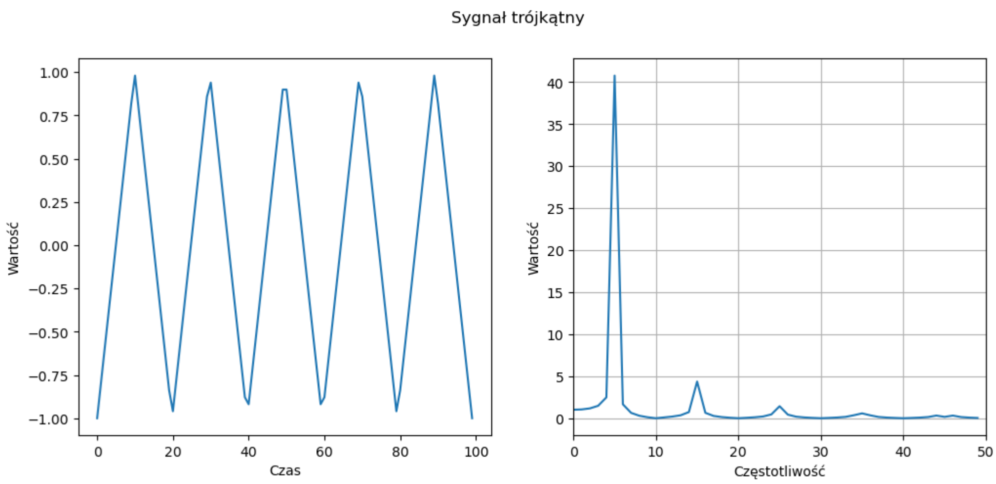
Poniżej przedstawiamy kilka wykresów widm częstotliwościowych, czyli wynik (dyskretnej) transformaty Fouriera różnych sygnałów, które już znasz. Wszystkie sygnały mają częstotliwość podstawową równą 5:

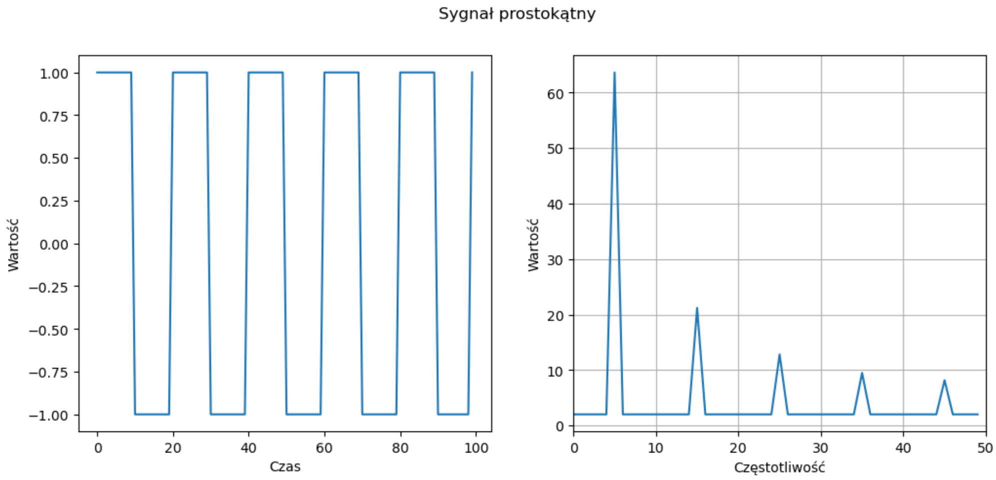
1. Wynik transformacji Fouriera jest zwany transformatą Fouriera, lecz często nazywa się tak samą transformację. Będziemy w skrypcie używać tej nazwy zamiennie.



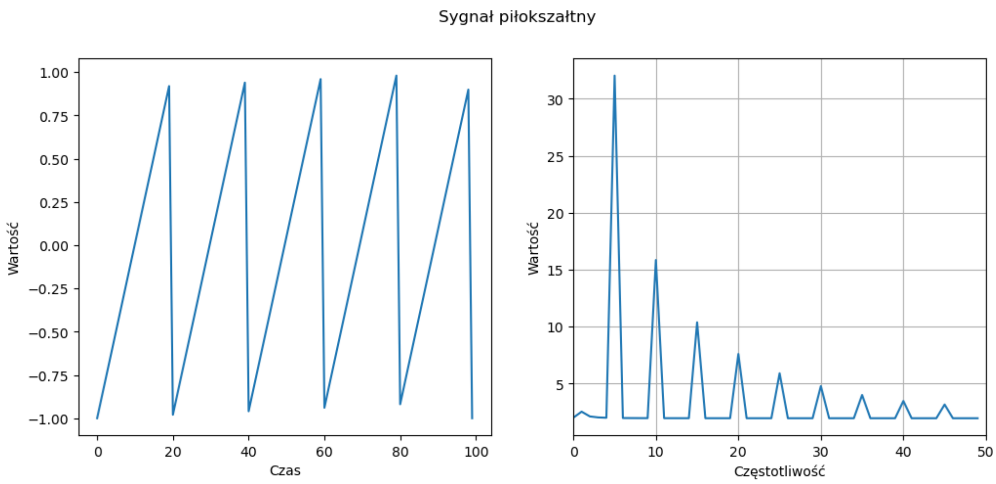


Jak widać, sygnał składający się z jednego tonu (sygnał sinusoidalny) ma jedno maksimum (szczyt) w swoim widmie częstotliwości. Sygnał składający się z dwóch sinusów o różnych częstotliwościach oraz amplitudach ma dwa szczyty o różnych wysokościach w swoim widmie.

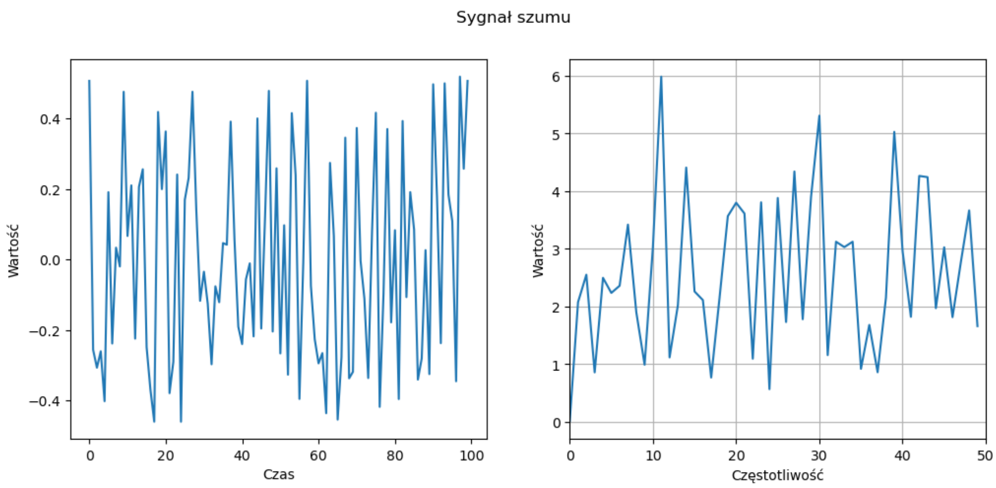




Sygnały trójkątny oraz prostokątny mają szczyty odpowiadające kolejnym nieparzystym harmonicznym (15, 25, 35, ...), ale różnią się one między sobą natężeniem



Sygnał piłokształtny składa się ze wszystkich harmonicznych częstotliwości podstawowej ze zmniejszającymi się amplitudami



Sygnał losowy (szum) nie ma żadnej częstotliwości podstawowej. Składa się ze wszystkich częstotliwości z losowymi amplitudami.

Zadanie 1.1.1

Zastanów się, jaką częstotliwość będzie miał sygnał o postaci

$$x(t) = \sin(2\pi ft) \cdot \cos(2\pi ft) \tag{2}$$

Sprawdź swoje przypuszczenia - korzystając z kodów programów, których używałeś/aś do generowania prostych tonów, wygeneruj taki sygnał a następnie narysuj jego transformatę Fouriera.

Zadanie 1.1.2

W podobny sposób jak w zadaniu 1.1.1, zbadaj widmo sygnału opisanego funkcją

$$x(t) = \sin^2(2\pi ft) \tag{3}$$

Sprawdź swoje przypuszczenia - korzystając z kodów programów, których używałeś/aś do generowania prostych tonów, wygeneruj taki sygnał a następnie narysuj jego transformatę Fouriera.

2 Filtry

Jednym z działań, jakie można wykonywać na sygnałach, jest użycie filtrów. Filtry zmieniają zawartość sygnału. Najprostrze filtry ograniczają pewne zakresy częstotliwości, a przepuszczają inne zakresy bez większych zmian. Bardziej skomplikowane filtry mogą wprowadzać inne, zaawansowane zmiany, jak np. odfiltrowanie ścieżki wokalnej (filtr „karaoke”) lub usunięcie szumu z nagrania (odszumianie).

Filtry można podzielić na kilka różnych sposobów. Najprostrzym z nich jest podział ze względu na sposób w jaki zmieniają **pasmo** sygnału, to znaczy, jak działają na różne częstotliwości:

- Filtry, które usuwają wysokie częstotliwości, a przepuszczają niskie nazywamy filtrami **dolnoprzepustowymi** (ang. *low-pass filter*),
- Filtry, które usuwają niskie częstotliwości, a przepuszczają wysokie nazywamy filtramy **górnoprzepustowymi** (ang. *high-pass filter*),
- Filtry, które przepuszczają częstotliwości w pewnym zakresie nazywamy filtrami **pasmowoprzepustowymi** (ang. *band-pass filter*),
- Filtry, które przepuszczają częstotliwości poza pewnym zakresem nazywamy filtrami **pasmowozaporowymi** (ang *band-stop filter*)

Filtry moga realizowane za pomocą urządzeń elektronicznych, mechanicznych albo wyrażeń matematycznych, w zależności od postaci sygnału. Na przykład filtrem dolnoprzepustowym, w zależności od postaci sygnału, można nazwać następujące rzeczy:

- Jeśli uznamy, że sygnałem jest wychylenie karoserii pojazdu, to filtrem dolnoprzepustowym jest amortyzator, który tłumi wibracje (wysokie częstotliwości wychylenia) pochodzące od kół.
- Dla sygnału elektrycznego (np. dźwięku), filtrem dolnoprzepustowych jest układ elektroniczny, który bardziej wzmacnia (mniej tłumi) niskie częstotliwości sygnału.
- Dla sygnały cyfrowego, bedącego serią wartości liczbowych, filtrem dolnoprzepustowym jest np. średnia krocząca, która każdemu punktowi przypisuje wartość średnią kilku kolejnych próbek, usuwając szybkozmienne częstotliwości[2].

Na zajęciach będziemy badać filtry w postaci średnich i innych działań na sygnałach cyfrowych, które reprezentują dźwięk w pamięci komputera.

2. Filtrowi w postaci średniej kroczącej, oraz powodom, dla których nie jest on idealny, będziemy przyglądać się na zajęciach

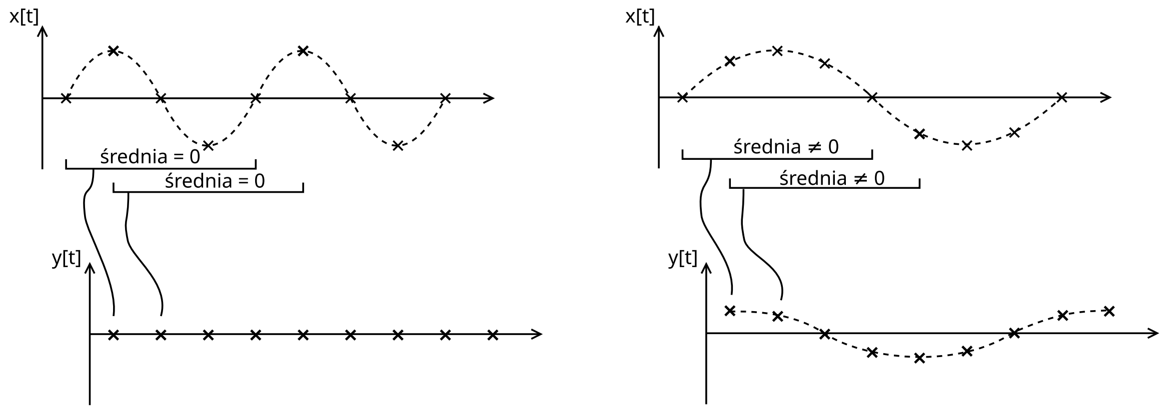
3 Cyfrowe przetwarzanie sygnałów

Jak ustaliliśmy wcześniej, sygnał dźwiękowy przechowywany w pamięci komputera to po prostu pewien ciąg liczb. Powiedzieliśmy również, że można go zmieniać wykonując na nim pewne działania matematyczne.

Weźmy jako przykład uśrednianie sygnału. Obliczymy wartość nowego sygnału y licząc średnią kroczącą z ostatnich N próbek sygnału x. Oznaczając n-tą próbkę sygnału x jako $x[n]$, możemy zapisać średnią z ostatnich N próbek jako:

$$y[n] = \frac{1}{N}\left(x[n] + x[n-1] + x[n-2] + ... + x[n-N]\right) \tag{4}$$

Intuicyjnie, to wyrażenie powinno pozostawić w sygnale części które zmieniają się wolno a usunąć te które zmieniają się szybko. Dzieje się tak ponieważ średnia wartość funkcji sinus w całym jej okresie wynosi zero. Oznacza to, że takie działanie spowoduje usunięcie wszystkich częstotliwości sygnału, których okres jest wielokrotnością N:



Rysunek 1: Wynik uśredniania sygnału szybkozmiennego (po prawej) oraz wolnozmiennego (po lewej)

4 Filtry o skończonej odpowiedzi impulsowej

W dalszej części eksperymentów będziemy zajmować się filtrami, które mnożą N poprzednich próbek sygnału $x[n]$ przez kolejne współczynniki $h[n]$ aby otrzymać wartość sygnału wyjściowego $y[n]$. Ich działanie można zapisać w następujący sposób:

$$y[n] = \sum_{k=0}^{N} x[n-k] \cdot h[k] \tag{5}$$

4.1 Splot po raz pierwszy

Poprzednie wyrażenie (5) opisuje działanie matematyczne zwane **splotem**. Splot ma wiele ciekawych właściwości, i najprościej jest zrozumieć jego działanie graficznie.

Splot funkcji oblicza wartości funkcji w punkcie k pomnożone przez wszystkie wartości drugiej funkcji, i ich sumę bierze jako wartość funkcji wynikowej w tym punkcie.

Możesz obliczyć splot korzystając z przykładowych funkcji wydrukowanych na przezroczystych foliach. W tym celu weź dwa wykresy funkcji (dwie funkcje), wybierz punkt, który weźmiesz jako k i przesuwaj nad tym punktem kolejne punkty drugiej funkcji przesuwając folię w poziomie. Pamiętaj, aby trzymać wartości na tej samej wysokości, to znaczy, “zera” na wykresie powinne być na tej samej wysokości w pionie.

Zadanie 4.1.1

Korzystając z folii z funkcjami, oblicz sploty kilku par funkcji. Czy zauważasz pewne zachowania niektórych z tych funkcji? Spróbuj wskazać, która funkcja użyta w splocie robi następującą rzecz z druga funkcją:

- Nie zmienia jej w wyniku splotu
- Oblicza jej różniczkę
- Oblicza jej średnią
- Oblicza jej średnią kroczącą (wygładza ją)

4.2 Filtr uśredniający

Średnia krocząca z N próbek z poprzedniego rozdziału jest dokładnie takim rodzajem filtra. Korzystając z pokazanej notacji, możemy opisać go jako

$$h[k] = 1/N \quad \text{dla} \quad k = 0, 1, ..., N \tag{6}$$

Takie filtry nazywamy **filtrami o skończonej odpowiedzi implusowej** (FIR - *finite impulse response*), ponieważ ich wynik zależy tylko od ostatnich N próbek sygnału. Inaczej mówiąc, żadna z próbek starsza od N nie ma wpływu na wynik filtru. Oznacza to, że po ustaniu sygnału (kolejne próbki równe zero), odpowiedź filtra (jego sygnał wyjściowy) również będzie równa zero nie później niż po N próbkach. Mówi się, że filtr ma **długość** N próbek.

Odpowiedź impulsowa filtra to sygnał, jaki da filtr, jeżeli na jego wejście podamy sygnał impulsu jednostkowego $\delta[t]$:

$$\delta[t] = \begin{cases} 1 & t = 0 \\ 0 & \text{w przeciwnym wypadku} \end{cases} \tag{7}$$

Obliczmy odpowiedź impulsową filtra uśredniającego ostatnie 3 próbki:

$$x[n] = \delta[n] = [1,\ 0,\ 0,\ ...] \tag{8}$$

$$h[n] = [1/3,\ 1/3,\ 1/3,\ 0,\ 0,\ ...] \tag{9}$$

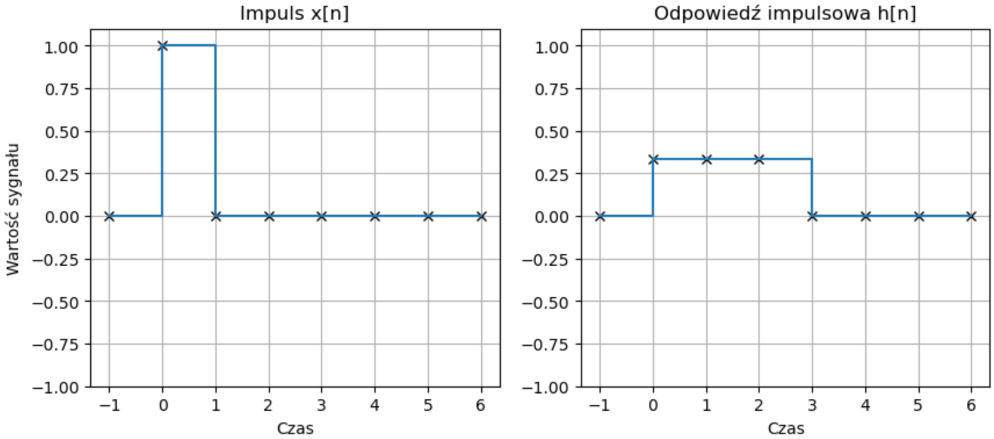
$$y[0] = x[0] \cdot h[0] + \quad x[-1] \cdot h[-1] + x[-2] \cdot h[-2] \quad = 1 \cdot 1/3 + 0 \cdot 1/3 + \quad 0 \cdot 1/3 = 1/3 \tag{10}$$

$$y[1] = x[1] \cdot h[1] + \quad x[0] \cdot h[0] + x[-1] \cdot h[-1] \quad = 0 \cdot 1/3 + 1 \cdot 1/3 + \quad 0 \cdot 1/3 = 1/3 \tag{11}$$

$$y[2] = x[2] \cdot h[2] + \quad x[1] \cdot h[1] + x[0] \cdot h[0] \quad = 1 \cdot 1/3 + 0 \cdot 1/3 + \quad 0 \cdot 1/3 = 1/3 \tag{12}$$

$$y[3] = x[3] \cdot h[3] + \quad x[2] \cdot h[2] + x[1] \cdot h[1] \quad = 0 \cdot 1/3 + 0 \cdot 1/3 + \quad 0 \cdot 1/3 = 0 \tag{13}$$

$$y[4] = ... \tag{14}$$



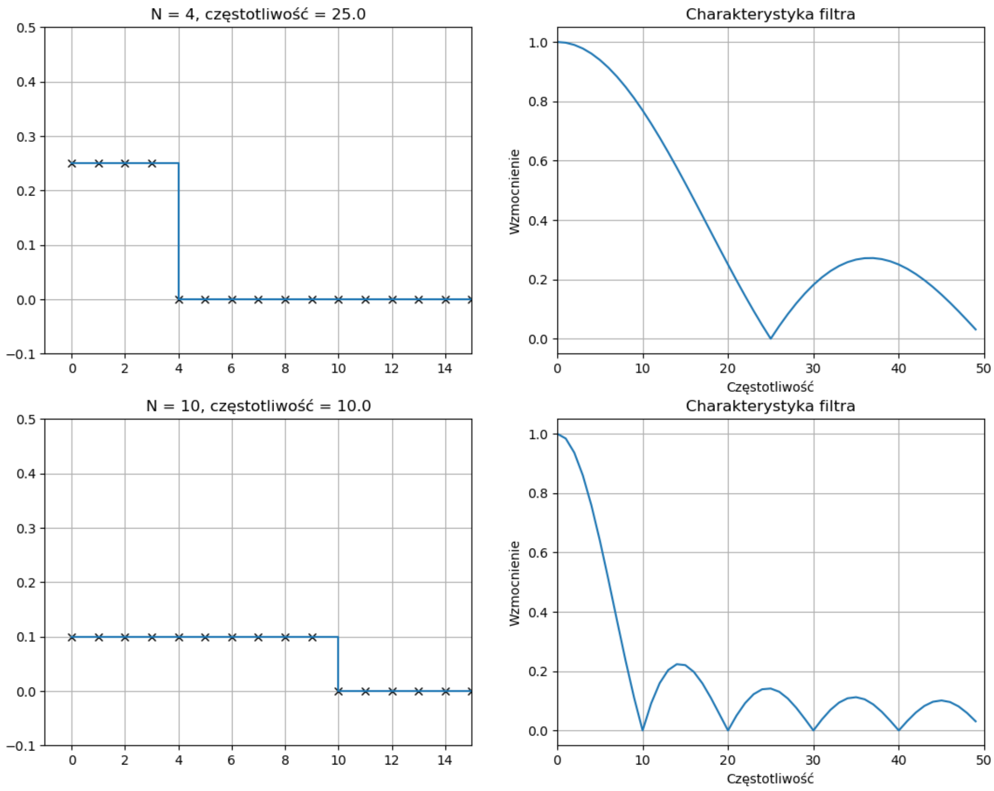
Rysunek 2: Impuls jednostkowy oraz odpowiedź impulsowa filtra

Tak jak pokazaliśmy na rysunku wcześniej, filtr uśredniający N próbek będzie wytłumiał wszystkie częstotliwości, których okres jest podwielokrotnością N.

Odpowiedź impulsowa filtra jest bardzo ważnym parametrem filtra. Ma ona bezpośredni wpływ na to, jakie częstotliwości filtr przepuszcza a jakie tłumi. Tę charakterystykę nazywamy **charakterystyką częstotliwościową filtra** lub krócej, charakterystyką filtra.

Można udowodnić, że charakterystyka filtra to transformata Fouriera odpowiedzi impulsowej:

$$H[k] = \mathfrak{F}\{h[n]\} \tag{15}$$



Rysunek 3: Dwa filtry uśredniające o różnej długości oraz ich charakterystyki

W sygnale o częstotliwości próbkowania 100 próbek/sek, filtr uśredniający 4 próbki będzie tłumił w pełni częstotliwośći 25Hz (okres 4 próbek) oraz jej harmoniczne. Filtr uśredniający 10 próbek będzie tłumił częstotliwości 10Hz (okres 10 próbek), 20Hz (okres 5 próbek), 30Hz (okres 3.33.. próbek) i pozostałe harmoniczne. Częstotliwości których okres nie da się wyrazić jako całkowita liczba próbek nie będą tłumione idealnie - jest to wynik przybliżenia.

Sygnał impulsu jednostkowego ma również przydatną własność - w idealnym przypadku zawiera on w sobie wszystkie częstotliwości:

$$\mathfrak{F}\{\delta[n]\} = \hat{1}[k] \tag{16}$$

Funkcja $\hat{1}[x] = 1$ to „jedynka" - funkcja specjalna mająca wartość 1 w każdym punkcie.

Obustronność transformaty

Jak pokażemy za chwilę, transformata Fouriera działa w „obie strony". Sygnał o stałej wartości 1 składa się tylko z jednej częstotliwości - 0 Hz. Zatem jego transformata Fouriera będzie miała tylko 1 prążek w $k = 0$:

$$\mathfrak{F}\{\ \hat{1}[n]\ \} = \delta[k] \tag{17}$$

4.3 Częstotliwość znormalizowana

Podczas rozpatrywania zachowań filtrów warto uniezależnić się od częstotliwości próbkowania. W tym celu wprowadza się pojęcie częstotliwości znormalizowanej oznaczanej f'. częstotliwość znormalizowana to taka, która wynosi 1 dla sygnału o częstotliwości równej częstotliwości próbkowania. To oznacza, że sygnał o częstotliwości równej f_s ma częstotliwość znormalizowaną $f' = 1$.

Przydatną właściwością częstotliwości znormalizowanej jest uproszczenie obliczeń związanych z filtrami. Na przykład, filtr uśredniający z poprzedniego rozdziału dla $N = 4$ ma częstotliwość odcięcia równą $f_c = f_s/4$. W częstotliwości znormalizowanej, $f_c = 1/N$. Jest to prawdziwe dla każdego N. Obliczenia filtrów w dziedzinie częstotliwości znormalizowanej są proste - wystarczy przyjąć częstotliwość próbkowania $f_s = 1$ (bez jednostki).

4.4 Filtry *sinc*

Jedną z własności transformaty Fouriera jest jej zachowanie podczas podwójnej transformaty[3]. Oznaczając transformatę Fouriera funkcji f jako

$$F(k) = \mathfrak{F}\{f(x)\} \tag{18}$$

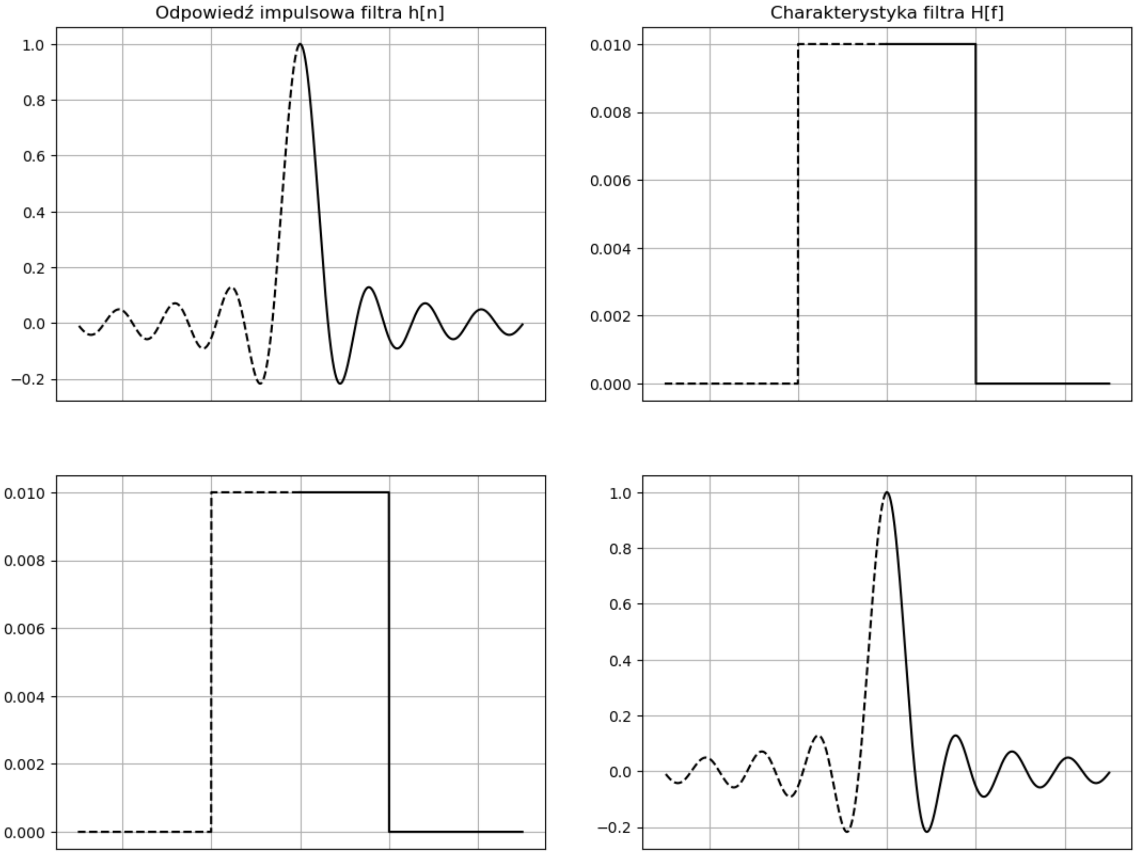
Transformata $F(k)$ to

$$\mathfrak{F}\{F(k)\} = \mathfrak{F}\{\mathfrak{F}\{f(x)\}\} = f(-x) \tag{19}$$

Ta właściwość jest szczególnie pożyteczna dla funkcji f, które są parzyste, czyli takie dla których $f(x) = f(-x)$.

Oznacza ona między innymi, że można wyznaczyć współczynniki filtra FIR tak aby uzyskać żądaną charakterystykę częstotliwościową. Te współczynniki to będą kolejne wartości transformaty Fouriera:

3. to znaczy, że do wyniku transformaty stosujemy kolejną transformatę Fouriera.



Rysunek 4: Góra: odpowiedź impulsowa i charakterystyka filtra uśredniającego. Dół: Odpowiedź impulsowa i charakterystyka idealnego filtra. Części wykresów dla argumentów ujemnych (po lewej: $n < 0$, po prawej, $f < 0$) są oznaczone linią przerywaną.

Współczynniki filtra FIR a jego charakterystyka

Współczynniki, przez które mnożymy kolejne próbki w filtrze FIR (czyli jego odpowiedź impulsowa) to transformata Fouriera jego charakterysytki. Z własności transformacji Fouriera ta zależność działa w obie strony.
Znając współczynniki filtra, możemy wyznaczyć jego charakterystykę, a znając pożądaną charakterystykę, możemy wyznaczyć potrzebne współczynniki.

Filtr uśredniający jest przedstawiony na górnym wykresie. Jego charakterysytka jest bardzo zafalowana. Oznacza to, że będzie on przepuszczał niektóre częstotliwości powyżej częstotliwości odcięcia. Filtr tłumi również częstotliwości nieco poniżej częstotliwości odcięcia. Z powodu tego jest mu daleko do idealnego filtra, w zamian za to jego stosowanie wymaga bardzo nieskomplikowanych obliczeń.

Idealny filtr przepuszcza wszystkie częstotliwości po jednej stronie częstotliwości odcięcia, a usuwa wszystkie po drugiej stronie. Jego charakterystyka częstotliwościowa to funkcja przedstawiona na prawym dolnym wykresie. Ponieważ działamy na funkcjach parzystych, to odpowiedź impulsowa będzie dokłanie równa jej transformacie Fouriera, która jest przedstawiona na lewym dolnym wykresie.

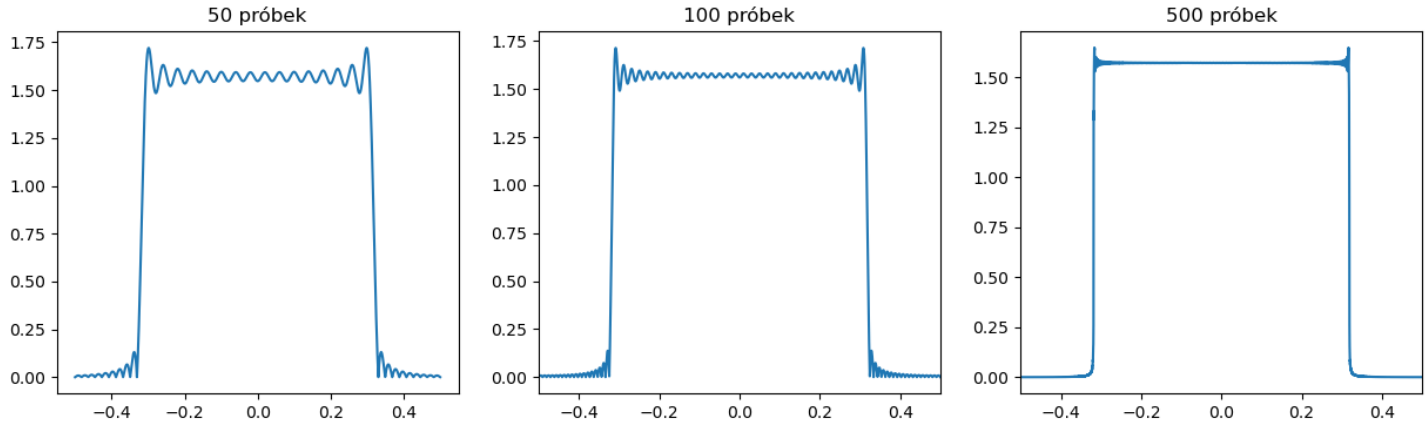
Zafalowana funkcja widoczna na wykresach to funkcja $\sin(x)/x$. Pojawia się ona bardzo często gdy mamy do czynienia z transformatą Fouriera. Ma ona nazwę **sinus cardinalis**[4], lecz często mówi się na nią **sinc** lub **sincus**:

$$\operatorname{sinc}(x) = \begin{cases} \frac{\sin(\pi x)}{\pi x} & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases} \tag{20}$$

W niektórych tekstach spotyka się wersję funkcji sinc z πx zamiast x. To tak zwana znormalizowana funkcja sinc. W zależności od dziedziny nauki używa się jednej albo drugiej wersji.

Filtr, którego odpowiedź impulsowa jest opisana funkcją sinc jest filtrem idealnym. Taki filtr nazywany jest **filtrem sinc** lub **filtrem prostokątnym**. Czasami, w dziedzinie obróbki dźwięku nazywa się on *brick-wall filter* ponieważ blokuje wszystkie częstotliwości powyżej (lub poniżej) częstotliwości odcięcia.

4.5 Zjawisko Gibbsa



Rysunek 5: Widmo funkcji sinc(x) obciętej z obu stron do pewnej ilości próbek. Zgodnie z teorią transformacji Fouriera, tak samo zachowuje się pasmo filtra sinc o ograniczonej długości odpowiedzi impulsowej.

Zjawisko Gibbsa polega na pojawianiu się oscylacji przy przbliżaniu funkcji ze skokową nieciągłością za pomocą skończonych szeregów Fouriera. Wynika to z własności skoku wartości funkcji. W miejscu nieciągłości, wartość funkcji zmienia się nieskończenie szybko, więc pasmo takiego sygnału jest nieskończenie duże (wymaga nieskończenie wysokich częstotliwości, żeby je opisać). Z tego powodu obcięcie szeregu Fouriera powoduje, że opisujemy przybliżoną funkcję korzystając z ograniczonego zakresu (pasma) częstotliwości.

W przypadku filtru sinc, jego skończona długość powoduje, że nie możemy idealnie odwzorować żądanej charakterystyki częstotliwościowej, która ma skokową nieciągłość. Idealny filtr dolnoprzepustowy o skończonej odpowiedzi impulsowej musiałby mieć nieskończoną długość, co jest sprzeczne.

Zjawisko Gibbsa jest powodem, dla którego charakterystyka rzeczywistych filtrów sinc jest zafalowana.

Podczas projektowania filtrów musimy wybrać kompromis pomiędzy długością filtra a jego idealnością charakterystyki. Filtry krótkie (przetwarzające małą ilość próbek wstecz) są szybkie do policzenia i wprowadzają małe opóźnienie, ale ich charakterysytki są dalekie od idealnych. Z drugiej strony, długie filtry mają charakterystyki prawie idealne, lecz wymagają więcej obliczeń i wprowadzają duże opóźnienia przetwarzania. Jest to spowodowane tym, że aby obliczyć wartość próbki sygnału wyjściowego, musimy znać N próbek sygnału wejściowego.

Zadanie 4.5.1

Korzystając z notebooków z filtrami, spróbuj zaobserwować i posłuchać jak zmienia się ich charakterystyka w zależności od długości filtra.

Istnieje drugi rodzaj filtrów cyfrowych, filtry o nieskończonej odpowiedzi impulsowej (ang. *IIR - Infinite Impulse Response*). Ich zasada działania jest równie prosta, lecz wymagają bardziej skomplikowanego opisu matematycznego, a niepoprawnie zaprojektowane mogą wpadać w oscylacje (zaczynają emitować niepożądane sygnały).

5 Splot funkcji

Równanie (5) jest „ograniczoną” wersją operacji zwanej **splotem**, oznaczanej $*$:

$$(f * g)[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f[n-k] \cdot g[k] \tag{21}$$

W przypadku filtrów o skończonej odpowiedzi impulsowej wynikiem działania filtru jest splot sygnału wejściowego $x[n]$ oraz odpowiedzi impulsowej $h[n]$. Ze względów praktycznych przybliża się operację splotu ograniczając sumowanie do długości filtru N.

Ważną cechą splotu jest jego zachowanie po poddaniu go transformacji Fouriera. Można pokazać, że transformata fouriera splotu to iloczyn transformat obu funkcji:

$$\mathfrak{F}\{f * g\} = \mathfrak{F}\{f\} \cdot \mathfrak{F}\{g\} \tag{22}$$

Podstawiając sygnał wejściowy oraz odpowiedź impulsową jak wyżej, równanie ma postać:

$$\mathfrak{F}\{x \ * \ h\} = \mathfrak{F}\{x\} \cdot \mathfrak{F}\{h\} \tag{23}$$

Jak już wiemy, transformata Fouriera $x[n]$ to widmo sygnału $X[k]$. Natomiast transformata odpowiedzi impulsowej $h[n]$ to charakterystyka częstotliwościowa filtra $H[k]$.

Wynika z tego, że splot sygnału wejściowego $x[n]$ z odpowiedzią impulsową filtra $h[n]$ jest równoważny z pomnożeniem widma sygnału $X[k]$ przez charakterysytkę częstotliwościową filtra $H[k]$:

$$\mathfrak{F}\{x[n] \ * \ h[n]\} = X[k] \cdot H[k] \tag{24}$$

Tę zależność widać bardzo dobrze podczas analizy widma lub spektrogramu sygnałów wejściowego oraz wyjściowego filtra. Filtr dokonuje splotu sygnału wejściowego $x[n]$ z odpowiedzią impulsową $h[n]$, a wynikowe widmo sygnału to widmo sygnału wejściowego $X[k]$ pomnożone przez charakterystykę filtra $H[k]$.

Zadanie 5.0.1

Spróbuj zmodyfikować notebook filtra uśredniającego tak aby zaimplementowac filtr grzebieniowy z zadania 6.0.4. Użyj istniejącego kodu aby zbadac jego charakterystykę oraz to w jaki sposób wpływa na dźwięk

Literatura

[1] Józef. K. Lasocki - Podstawowe wiadomości z nauki o muzyce, Kraków 2010, PWM SA

[2] Fritz Winckel - Osobliwości Słyszenia Muzycznego, Warszawa 1965, PWN SA

[3] Powierzchnia Słyszalności, domena publiczna, źródło https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Powierzchnia_slyszalnosci.svg

[4] Źródło: Wstęp do kognitywistyki, B16.1 Czucie i percepcja, Włodzisław Duch, UMK, http://fizyka.umk.pl/~duch/Wyklady/WDK/16-percepcja.htm

[5] Na podstawie https://www.nti-audio.com/en/support/know-how/fast-fourier-transform-fft

[6] Próbki instrumentów muzycznych wykorzystane do wykresów przygotował Daniel Laskowski.

[7] Na podstawie Mutopia Project - Für Elise, https://www.mutopiaproject.org/ftp/BeethovenLv/WoO59/fur_Elise_WoO59/fur_Elise_WoO59-let.pdf

6 Zadania dodatkowe

Zadanie 6.0.1

Czy da się zaprojektować filtr uśredniający, który usuwa częstotliwości 400 Hz oraz 600 Hz ale pozostawia częstotliwość 200Hz?

Zadanie 6.0.2

Znając zachowanie filtra uśredniającego o długości N próbek, oblicz, ile próbek trzeba uśrednić (jak długi musi być filtr) aby jego częstotliwość odcięcia była równa $f_c = 4\text{kHz}$ dla sygnału o częstotliwości próbkowania $f_s = 32\text{kHz}$.
Wskazówka: Skorzystaj z częstotliwości znormalizowanej

Zadanie 6.0.3

Jaką charakterystykę częstotliwościową będzie miał filtr, którego odpowiedzią impulsową jest funkcja $\delta[n]$?
Sprawdź swoje przypuszczenia znajdując jaką transformatę Fouriera ma funkcja $\delta[n]$.
Wskazówka: Zastanów się, jak zachowuje się splot dowolnej funkcji z funkcją δ.

Zadanie 6.0.4

obliczenia na liczbach zespolonych
Oblicz charakterystykę częstotliwościową filtra o poniższej odpowiedzi impulsowej:

$$h[0] = 1/2 \tag{25}$$
$$h[1] = 0 \tag{26}$$
$$h[2] = 1/2 \tag{27}$$
$$h[n] = 0 \quad n = 3, 4, ..., 8. \tag{28}$$

Wskazówka: aby uprościć obliczenia użyj częstotliwości znormalizowanej: $k = 0, ..., 4$, $N = 8$, wtedy wartości argumentów sin oraz cos są wielokrotnościami $\pi/4$. Uproszczenie wzoru 30 dla obliczenia samej wartości bezwzględnej ma postać:

$$|X[k]| = \left|\sum_{n=0}^{N-1} h[n] \left(\sin(2\pi kn/N) - j\cos(2\pi kn/N)\right)\right| \tag{29}$$

Zadanie 6.0.5

Filtr grzebieniowy
Zastanów się, jaki wpływ na sygnał miałby filtr który dodaje do sygnału jego kopię opóźnioną o k próbek? Jak wygląda odpowiedź impulsowa tego filtra? Zastanów się, jak wygląda charakterystyka częstotliwościowa tego filtra oraz skąd pochodzi jego nazwa?

Do poniższych dwóch zadań przyda Ci się wzór na dyskretną czasową transformatę Fouriera (DTFT):

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]\ \cos(2\pi kn/N) - j\sum_{n=0}^{N-1} x[n]\ \sin(2\pi kn/N) \tag{30}$$

Sumowanie odbywa się po wszystkich próbkach sygnału. $x[n]$ oznacza n-tą próbkę sygnału. Dyskretna czasowa transformata Fouriera daje nam dyskretny rozkład częstotliwości $X[k]$ w sygnale $x[n]$. $k = 0$ oznacza częstotliwość zerową, czyli wartość stałą. Jest to średnia sygnału w czasie. $k = 1$ oznacza częstotliwość jaką ma fala wykonująca jeden okres drgań w czasie N próbek trwania sygnału. $k = 2$ opisuje częstotliwość fali wykonującej dwa okresy, itd., aż do częstotliwości $k = \lfloor N/2 \rfloor$ która wykonuje jeden okres drgań co dwie próbki. Ta częstotliwość to połowa częstotliwości próbkowania f_s, czyli najwyższa częstotliwość jaką dany sygnał może opisać zgodnie z twierdzeniem Nyquista. $\lfloor x \rfloor$ oznacza zaokrąglenie x w dół.

Zadanie 6.0.6

Na podstawie wzoru 30 udowodnij następującą własność (dyskretnej czasowej) transformacji Fouriera:

$$\mathfrak{F}\{a(x) + b(x)\} = \mathfrak{F}\{a(x)\} + \mathfrak{F}\{b(x)\} \tag{31}$$

Zadanie 6.0.7

Na podstawie wzoru 30 udowodnij następującą własność (dyskretnej czasowej) transformacji Fouriera:

$$\mathfrak{F}\{Af(x)\} = A\mathfrak{F}\{a(x)\} \tag{32}$$

7 Dowód twierdzenia o splocie dla DFT

Dodatkowo - wymaga użycia wzoru Eulera $\exp(jx) = \cos(x) + j\sin(x)$ oraz wzoru na odwrotną dyskretną transformatę Fouriera. Bez wzoru Eulera dowód wymaga wykonania dużej ilości przekształceń trygonometrycznych.

$$\mathfrak{F}\{f(x) * g(x)\} = \mathfrak{F}\{f(x)\} \cdot \mathfrak{F}\{g(x)\} \tag{33}$$

Dowód na sumach dla DTFT na podstawie dowodu dla FT `https://mathworld.wolfram.com/ConvolutionTheorem.html`.

$$x * y = \sum_{m=0}^{N-1} x_m y_{m-n} = \tag{34}$$

$$= \sum_{m=0}^{N-1} x_m \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} Y_k e^{j2\pi k(n-m)/N} = \tag{35}$$

$$= \sum_{m=0}^{N-1} x_m \left[\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} Y_k e^{j2\pi k(n)/N} \right] N e^{-j2\pi km/N} = \tag{36}$$

$$= \sum_{m=0}^{N-1} x_m \left[\sum_{k=0}^{N-1} Y_k e^{j2\pi k(n)/N} \right] e^{-j2\pi km/N} = \tag{37}$$

$$= \sum_{m=0}^{N-1} x_m e^{-j2\pi km/N} \left[\sum_{k=0}^{N-1} Y_k e^{j2\pi k(n)/N} \right] = \tag{38}$$

$$= X_k \left[\sum_{k=0}^{N-1} Y_k e^{j2\pi k(n)/N} \right] = \tag{39}$$

$$= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X_k Y_k e^{j2\pi k(n)/N} = \mathrm{IDTFT}(X \cdot Y) \tag{40}$$