

Matematyka dla Ciekawych Świata XV — lista dodatkowa

Całka i pochodna

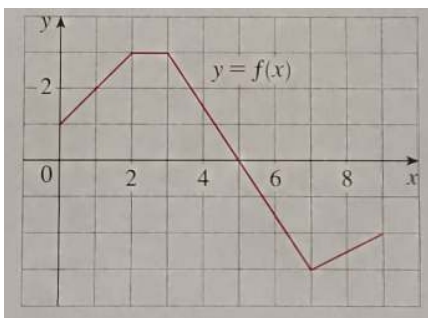
Maria Gokieli

20 maja 2024

1. Na rysunku widzisz wykres funkcji f . Licząc odpowiednie pola, oblicz całki:

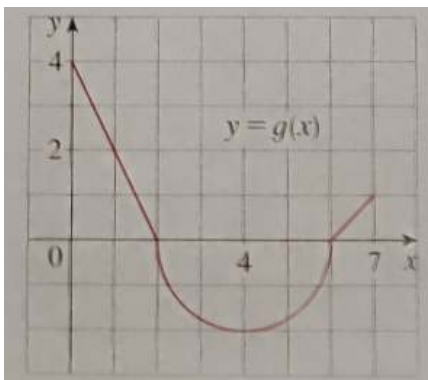
a) $\int_0^2 f(x) dx$, c) $\int_5^7 f(x) dx$,

b) $\int_0^5 f(x) dx$, d) $\int_0^9 f(x) dx$.



2. Na rysunku widzisz wykres funkcji g , składający się z prostych odcinków i półkola. Oblicz całki:

a) $\int_0^2 g(x) dx$, b) $\int_2^6 g(x) dx$, c) $\int_0^7 f(x) dx$.



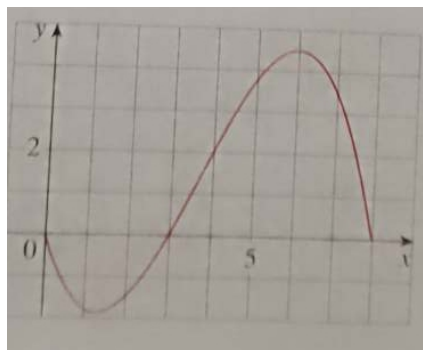
3. Oblicz $\int_0^5 f$ jeśli

$$f(x) = \begin{cases} 3 & \text{dla } x < 3 \\ \pi & \text{dla } x \geq 3. \end{cases}$$

4. Na rysunku widzisz wykres funkcji f . Uporządkuj następujące wielkości w kolejności od najmniejszej do największej i wytłumacz swój wybór.

a) $\int_0^8 f(x) dx$, c) $\int_3^8 f(x) dx$, e) $f'(1)$.

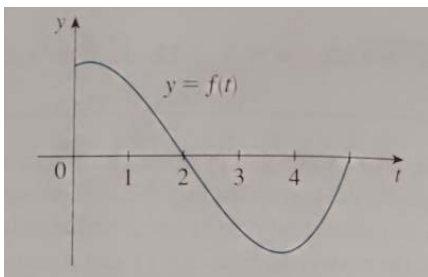
b) $\int_0^3 f(x) dx$, d) $\int_4^8 f(x) dx$,



5. Definiujemy funkcję F wzorem:

$$F(x) = \int_2^x f(t) dt,$$

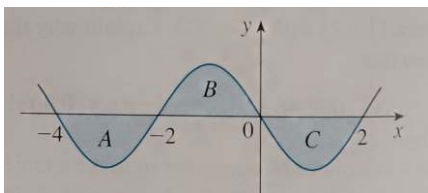
gdzie f jest funkcją, którą widzisz na rysunku poniżej. Uporządkuj następujące wielkości w kolejności od najmniejszej do największej i wytłumacz swój wybór.



- a) $F(0)$, c) $F(2)$, e) $F(4)$.
 b) $F(1)$, d) $F(3)$,

6. Każdy z obszarów A , B , C , ograniczony z jednej strony wykresem funkcji f , a z drugiej osią x , ma pole równe 3. Znajdź wartość

$$\int_{-4}^2 (f(x) + 2x + 5) dx.$$



7. a) W układzie współrzędnych (t, y) narysuj prostą o równaniu $y = 2t + 1$; oblicz pole ograniczone tą prostą, osią t , prostymi $t = 1$ oraz $t = 3$.
 b) dla $x > 1$, niech $A(x)$ będzie polem obszaru leżącego pod prostą $y = 2t + 1$ (tzn. między tą prostą a osią t), pomiędzy prostymi $t = 1$ oraz $t = x$. Zrób szkic i za pomocą prostej geometrii znajdź wzór na $A(x)$.
 c) Znajdź pochodną funkcji A . Co zauważasz?

8. (*) a) Dla $x \geq 1$, określamy

$$A(x) = \int_{-1}^x (1 + t^2) dt.$$

$A(x)$ jest polem pewnego obszaru. Narysuj ten obszar.

- b) Użyj jednego z wyników wykładu, aby obliczyć pole tego obszaru.
 c) Użyj wiedzy o pochodnych ze szkoły lub jednego z wyników zadań z poprzednich ćwiczeń, aby obliczyć $A'(x)$. Co zauważasz?

9. a) Niech $f(x) = x^2$. Policz z definicji $f'(1)$, $f'(2)$, $f'(t)$. Narysuj wykres funkcji $x \mapsto f'(x)$.
 b) Wykonaj to samo polecenie dla $g(x) = 3x^2$ oraz $h(x) = (3x)^2$. Jak zmieni się pochodna?

10. a) Narysuj wykres funkcji $f(t) = |t|$.

- b) Oszacuj $f'(1)$, $f'(4)$, $f'(-2)$, $f'(-10)$, $f'(x)$ dla $x > 0$ i dla $x < 0$.

c) Czy możesz narysować wykres $x \mapsto f'(x)$?

d) Oblicz $\int_0^1 f$, $\int_0^2 f$, $\int_0^x f$ dla $x > 0$.

11. Narysuj wykres funkcji $f(x) = \sin x$ na przedziale $(-7, 7)$. Rysując odpowiednie styczne do tego wykresu, spróbuj naszkicować wykres pochodnej tej funkcji. Jaką funkcję przypomina ten wykres?

12. Wykonaj to samo polecenie, co w poprzednim zadaniu, dla $f(x) = \cos x$.

13. Oblicz okres funkcji:

- a) $\sin(2x)$, c) $\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)$, e) $3 \sin^2(2\pi x)$.
 b) $3 \cos x$, d) $\frac{\sin(\pi x)}{\pi}$,