

# Matematyka dla Ciekawych Świata XV — lista 7

## Teoria neoriemannowska

Daniel Laskowski

27 maja 2024

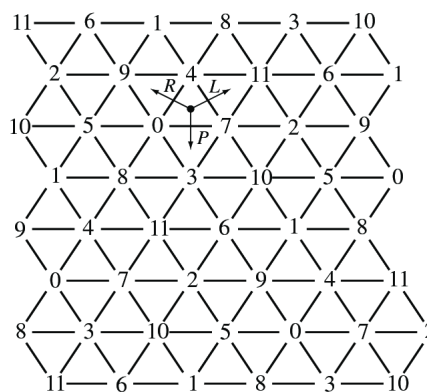
### 1 Powtórzenie z wykładu

Na wykładzie poznaliśmy grupę, generowaną przez trzy przekształcenia –  $\mathbf{P}$ ,  $\mathbf{R}$  oraz  $\mathbf{L}$ . Grupa ta działała na zbiór trójdźwięków w następujący sposób:

- przekształcenie  $\mathbf{P}$  zmieniało trójdźwięk durowy na mollowy i odwrotnie, np.  $\mathbf{P}(F) = f$  oraz  $\mathbf{P}(f) = F$ ,
- przekształcenie  $\mathbf{L}$  trójdźwiękowi durowemu przypisywało trójdźwięk mollowy o tercję wielką (czyli 4 półtony) wyższy, np.  $\mathbf{L}(C) = e$ , a mollowemu odwrotnie – durowy o tercję wielką niższy, np.  $\mathbf{L}(f) = D$ ,
- przekształcenie  $\mathbf{R}$  trójdźwiękowi durowemu przypisywało trójdźwięk mollowy o tercję małą niższy, np.  $\mathbf{R}(C) = a$ , a mollowemu odwrotnie – durowy o tercję małą wyższy, np.  $\mathbf{R}(c) = Es$ .

Wprowadziliśmy sobie również parametry  $m$  oraz  $d$ , pozwalające „zdefiniować” trójdźwięk durowy w danym systemie harmonicznym. Przykładowo, w poznanym w zeszłym tygodniu systemie dur-moll  $m = 4$ , a  $d = 7$ . Parametry te, pozwalają nam utworzyć trójdźwięk durowy od dowolnego dźwięku w górę – zauważmy, że to odległości w półtonach od podstawy akordu, a zatem wystarczy dodać je do klasy wysokości dźwięku opisującej podstawę akordu. Na przykład, gdy chcemy utworzyć trójdźwięk  $D$ -dur zaczniemy od zamiany  $D$  na klasę wysokości czyli 2. Następnie do 2, dodajemy  $m$  (mamy 6) oraz  $d$  (otrzymujemy 8). Dzięki temu wiemy, że trójdźwięk  $D$ -dur będzie składać się z dźwięków 2, 6 i 8, czyli  $D, Fis, A$ . Na koniec stworzyliśmy „mapę” zależności między trójdźwiękami – *Tonnetz*, na której ruch w poziomie oparty był na liczbie  $d$ , a w skosach na liczbie  $m$  oraz  $d - m$ .

*Tonnetz* w systemie dur-moll wyglądała następująco:



Mając *Tonnetz* łatwiej zobaczyć jak działają przekształcenia  $\mathbf{P}$ ,  $\mathbf{R}$  oraz  $\mathbf{L}$ , co widać na powyższym obrazku. Każdemu akordowi durowemu odpowiada teraz trójkąt skierowany w górę, a mollowemu – w dół.

### 2 Zadania

1. Wyznacz jaki trójdźwięk uzyskamy w następujących transformacjach:

- a)  $\mathbf{P}(D)$ ,
- b)  $\mathbf{P}(e)$ ,
- c)  $\mathbf{L}(A)$ ,
- d)  $\mathbf{L}(f)$ ,
- e)  $\mathbf{R}(G)$ ,
- f)  $\mathbf{R}(d)$ .

2. Znane nam transformacje można również składać (tzn. wykonywać kilka operacji po kolei). Przyjmujemy wówczas, że wykonujemy je kolejno od lewej do prawej, czyli np. transformacja  $\mathbf{RLP}$ , to najpierw wykonanie  $\mathbf{R}$ , następnie  $\mathbf{L}$ , a na koniec  $\mathbf{P}$  na zadanym akordzie. Wyznacz jakie trójdźwięki uzyskamy w następujących transformacjach:

- a)  $\mathbf{PR}(C)$ ,
- b)  $\mathbf{LP}(C)$ ,
- c)  $\mathbf{RL}(C)$ ,

