

# Matematyka dla Ciekawych Świata XV — lista 5

## Decybele i pochodna oraz powtórzenie o grupach

Daniel Laskowski, Maria Gokieli

13 maja 2024

### 1 Powtórzenie z wykładu

Na wykładzie zdefiniowaliśmy logarytm przy podstawie  $a \in (0, 1) \cup (1, +\infty)$  jako funkcję  $\log_a : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  taką, że:

$$\log_a b = c \Leftrightarrow a^c = b.$$

Zdefiniowaliśmy również pojęcie pochodnej z funkcji  $f$  w punkcie  $x_0$ , jako:

$$f'(x_0) := \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

W praktyce pochodna w punkcie  $x_0$  odpowiada współczynnikowi kierunkowemu stycznej do wykresu funkcji  $f$  w punkcie  $x_0$ .

### 2 Zadania: logarytmy

1. Oblicz:

- |                         |                                |
|-------------------------|--------------------------------|
| a) $\log_2 8$           | e) $\log_2 \sqrt{2}$           |
| b) $\log_3 9$           | f) $\log_3 \sqrt{27}$          |
| c) $\log_4 \frac{1}{4}$ | g) $\log_7 \frac{\sqrt{7}}{7}$ |
| d) $\log_5 625$         | h) $\log_{2024} 1$             |

2. Udowodnij, że  $\log_a b + \log_a c = \log_a (bc)$ .

3. Udowodnij, że  $\log_a (b^n) = n \log_a b$ .

4. Udowodnij, że  $\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$ .

5. Poziom natężenia dźwięku w decybelach opisuje wzór:

$$L = 10 \log_{10} \left( \frac{I}{I_0} \right),$$

gdzie  $I$  to natężenie dźwięku, a  $I_0$  jest stałą, wynoszącą  $10^{-12} \frac{W}{m^2}$ . Powiemy, że dźwięk o natężeniu  $I_1$  jest dwa razy głośniejszy o dźwięku o natężeniu  $I_2$ , gdy  $\frac{I_1}{I_2} = 2$ . O ile decybeli różni się poziom natężenia tych dwóch dźwięków?

6. Poziom natężenia dźwięku zwykłej rozmowy wynosi około 60 dB. Progiem bólu nazywamy poziom natężenia dźwięku, wywołujący odczuwanie bólu ucha i jest to dźwięk milion razy głośniejszy niż rozmowa. Ile decybeli wynosi próg bólu? (Patrz zadanie poprzednie).

7. Oblicz:

- $2 \log_7 49 - \log_7 \frac{1}{7}$
- $\log_3 273 + \log_3 1,75$
- $\log_3 14 \cdot \log_{14} 21 \cdot \log_{21} 81$
- $\log_8 32$

### 3 Zadania: pochodna

8. Wybierz jakąś funkcję  $f$  i punkt  $x_0$ . Wykonaj rysunek ilustrujący definicję  $f'(x_0)$ . Powtórz to dla innej funkcji i innego punktu  $x_0$ . Na podstawie rysunku, powiąż słowa "pochodna", "styczna", "sieczna".

9. Na podstawie definicji pochodnej w punkcie, wykonaj rysunek ilustrujący fakt, że

- jeśli  $f$  jest rosnąca (malejąca) w otoczeniu punktu  $x_0$ , to  $f'(x_0) > 0$  ( $f'(x_0) < 0$ ),
- jeśli  $f$  ma maksimum lub minimum lokalne w punkcie  $x_0$ , to  $f'(x_0) = 0$ ,
- jeśli  $f'(x_0) = 0$ , to  $f$  może, ale nie musi mieć maksimum ani minimum lokalnego w punkcie  $x_0$ .

10. Oblicz z definicji pochodną funkcji  $f$  w punkcie  $x_0$ , gdy:

- a)  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 3x, x_0 = 3$
- b)  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^2, x_0 = 7$
- c)  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 2x^3, x_0 = -1$
- d)  $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{x}, x_0 = -2$
- e)  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^2 + 1, x_0 = -2$
- f)  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^2 - 2x, x_0 = 3$
- g)  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^3 + 3x, x_0 = 4$
- h)  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^4 + 3x^3 - 2x^2 + x, x_0 = -5$

## 4 Zadania: grupy cd.

Uwaga: izometrie to przekształcenia nie zmieniające odległości. Można ogólnie pokazać, że – poza przekształceniem tożsamościowym, tzn. nie zmieniającym nic – na płaszczyźnie są to obroty, symetrie i przesunięcia (zwane też translacjami; z kolei fizycy czasem symetriasami nazywają wszystkie izometrie).

Pomiędzy izometriami możemy wprowadzić działanie złożenia:  $q \circ p$  oznacza, że najpierw działa przekształcenie  $p$  a potem (!!!)  $q$ . Np.  $q \circ p(M) = q(p(M))$ , gdzie  $M$  jest jakimś punktem płaszczyzny; to znaczy, że najpierw przekształcamy  $M$  izometrią  $p$  (np. obracamy go o 13 stopni), a później otrzymany w wyniku tego przekształcenia punkt przekształcamy jeszcze izometrią  $q$  (np. odbijamy względem pewnej ustalonej osi).

**11.** Rozważamy odcinek  $\overline{AB}$  oraz wszystkie izometrie na płaszczyźnie (lub prostej), które przekształcają ten odcinek w niego samego.

- a) Ile elementów ma nasz zbiór izometrii w tym przypadku?
- b) Uzasadnij, że zbiór ten razem z działaniem złożenia jest grupą.

**12.** Rozważamy trójkąt równoboczny  $ABC$  oraz wszystkie izometrie na płaszczyźnie, które przekształcają ten trójkąt w niego samego. Pomiędzy tymi izometriami wprowadzamy działanie złożenia:  $q \circ p$  oznacza, że najpierw działa przekształcenie  $p$  a potem (!)  $q$ .

- a) Ile elementów ma nasz zbiór izometrii w tym przypadku? Wprowadź oznaczenie dla każdego z nich.
- b) Uzasadnij, że zbiór ten razem z działaniem złożenia jest grupą.
- c) Stwórz tabelkę działania złożenia w tej grupie. (Umówmy się np., że jako pierwsze działa prze-

kształcenie w wierszu, jako drugie w kolumnie).

- d) Czy można wyróżnić wśród tych izometrii mniejszy podzbiór, który z tym samym działaniem także stworzy grupę? (Czyli *podgrupę*).

**13.** Powtórz poprzednie zadanie dla kwadratu  $ABCD$ .

## 5 Praca domowa

### 5.1 Zadania za 1 punkt

**14.** Zwykła rozmowa ma poziom 60 dB, a szept to rozmowa o poziomie do 30 dB. Szelest liści ma poziom 20 dB. Ile razy cichszy jest szept i szelest od zwykłej rozmowy (ile razy mniejsze ma natężenie)?

**15.** W klasie 2B poziom hałasu w czasie lekcji matematyki wynosi 80 dB, pralka *Szalowa* ma w czasie wirowania poziom hałasu 75 dB, pralka *Super Szalowa* – 65 dB. Ile razy głośniejsza jest pralka *Szalowa* od *Super Szalowej*, ile razy głośniejsza jest klasa 2B?

### 5.2 Zadania za 2 punkty

**16.** Natężenie dźwięku wzrosło tysiąc razy. Jak zmienił się poziom natężenia?

**17.** Wykonaj ilustrację pochodnej funkcji  $f(x) = 3x$  w dowolnie wybranych dwóch punktach. Co możemy powiedzieć o tej pochodnej? A jeśli 3 zastąpimy dowolnie wybraną liczbą  $a$ ?

**18.** Oblicz z definicji pochodną funkcji  $f(x) = 3x$  dla  $x_0 = 0$  i  $x_0 = 1$ . Co będzie, jeśli wybierzemy inne  $x_0$ ?

### 5.3 Zadania za 3 punkty

**19.** Udowodnij, że  $\log_a b - \log_a c = \log_a \left(\frac{b}{c}\right)$ .

**20.** Udowodnij, że  $\log_{a^n} b = \frac{1}{n} \log_a b$ .

**21.** Wyznacz z definicji (!) pochodną funkcji  $f(x) = x^3 - 3x^2 + 7x$  w punkcie  $x_0 = 3$ .

**22.** Rozważamy zbiór permutacji zbioru  $\{1, 2, 3\}$ . (Permutacja to dowolne "przemieszanie" tych liczb, np.  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ ) — gdzie na górze jest początkowy układ, na dole "przemieszany"). Wyposażamy nasz zbiór w działanie złożenia. Wskaż element neutralny działania. Wykaż, że jest to grupa.