Jak zmierzyć? Podejście 1.

Matematyka dla ciekawych świata XV

Daniel Laskowski

Instytut Muzykologii UW

08.04.2024

Zawartość interwałowa

Definicja

Zawartością interwałową nazywamy kolekcję wszystkich interwałów, zawartych w zbiorze klas wysokości A, policzonych z krotnościami.

Zawartość interwałowa

Definicja

Zawartością interwałową nazywamy kolekcję wszystkich interwałów, zawartych w zbiorze klas wysokości A, policzonych z krotnościami.

Przykład:

Zawartość interwałowa

Definicja

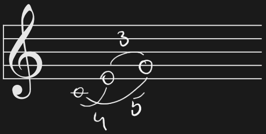
Zawartością interwałową nazywamy kolekcję wszystkich interwałów, zawartych w zbiorze klas wysokości A, policzonych z krotnościami.

Przykład:

$\{0, 4, 7\}$

$7 - 0 = 7$

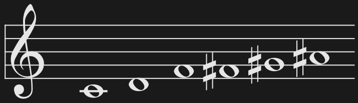
$0 - 7 = 5$



$\langle 0, 0, 1, 1, 1, 0 \rangle$

Jeszcze jeden przykład

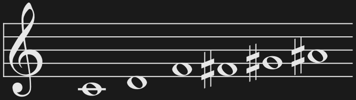
$\{0, 2, 5, 6, 8, T\}$



$\langle 1, 4, 2, 4, 2, 3 \rangle$

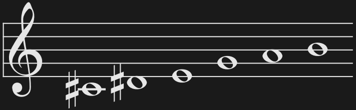
Jeszcze jeden przykład

$\{0, 2, 5, 6, 8, T\}$



$\langle 1, 4, 2, 4, 2, 3 \rangle$

$\{1, 3, 4, 7, 9, E\}$



$\langle 1, 4, 2, 4, 2, 3 \rangle$

Twierdzenie o heksachordzie

Twierdzenie (M. Babbitt)

Niech H będzie heksachordem, a $\overline{H}$ jego dopełnieniem. Wówczas $\mathcal{I}_H = \mathcal{I}_{\overline{H}}$.

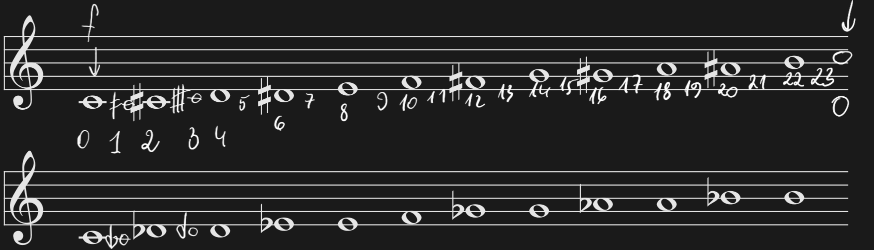
Co dalej?

$+\frac{1}{4}$ tonu

$+\frac{3}{4}$ tonu

$\mathbb{Z}_{24}$

$\mathbb{Z}_{24}$ 2f



$-\frac{1}{4}$ tonu

$-\frac{3}{4}$ tonu

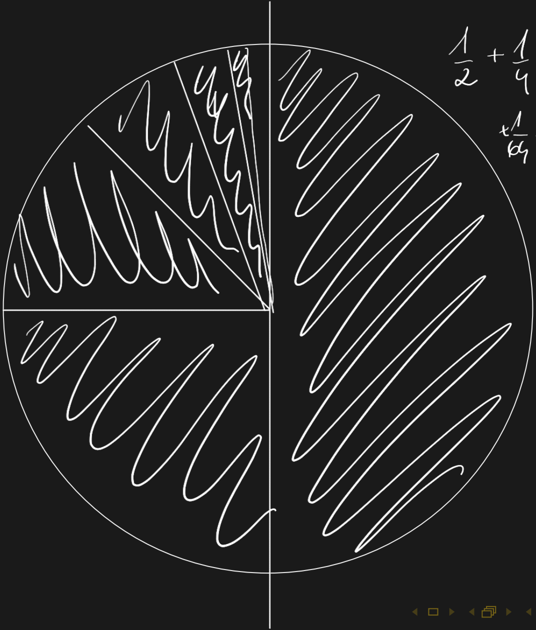
Wektor interwałowy

$\langle -, -, -, -, -, -, -, -, -, -, - \rangle$

$|A| = 12 \quad |\bar{A}| = 12 \Rightarrow J_A = J_{\bar{A}}$

Tw. o zbiorach o 12-elementowych

Szereg geometryczny



$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\frac{1}{64}+\frac{1}{128}+\frac{1}{256}+\ldots=1$$

Zbieżność szeregu geometrycznego

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n q^{n-1} = a_1 \cdot q^0 + a_2 q^1 + a_3 \cdot q^2 + a_4 q^3 + \dots$$

$$1+2+3+4+\dots+100 = \sum_{n=1}^{100} n \qquad 2+4+6+8+\dots+200 = \sum_{n=1}^{100} 2n$$

Twierdzenie

Szereg geometryczny:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n q^{n-1}$$

jest zbieżny do granicy $\frac{a_1}{1-q}$ gdy $\underline{|q| < 1} \iff q \in (-1, 1)$

$a_1 = \frac{1}{2}$

$a_2 = \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \cdot \boxed{\frac{1}{2}}$

$a_3 = \frac{1}{8} = \frac{1}{4} \cdot \boxed{\frac{1}{2}}$

$a_4 = \frac{1}{16} = \frac{1}{8} \boxed{\frac{1}{2}}$

$q = \frac{1}{2}$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

Dowód $q \neq 1$

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n = a_1 + a_1 \cdot q + a_1 \cdot q^2 + a_1 \cdot q^3 + \ldots + a_1 q^{n-1}$$

$$-\begin{cases} S_n = a_1 + a_1 q + a_1 q^2 + \ldots + a_1 q^{n-1} \\ q S_n = a_1 q + a_1 q^2 + \ldots + a_1 q^n \end{cases}$$

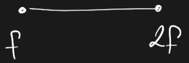
$$S_n - q S_n = a_1 - a_1 q^n$$

$$S_n (1-q) = a_1 (1 - q^n) \quad / : (1-q) \neq 0$$

$$S_n = a_1 \frac{1-q^n}{1-q}$$

$$\downarrow n \to +\infty \qquad \downarrow n \to +\infty$$

$$S = a_1 \cdot \frac{1}{1-q} = \frac{a_1}{1-q}$$



Przykład:

$a_1 = \frac{1}{2} \qquad q = \frac{1}{2}$

$$S = \frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} = 1$$

Zbiór ograniczony

Definicja

Powiemy, że zbiór $A \subseteq \mathbb{R}$ jest ograniczony z góry przez $M \in \mathbb{R}$ jeśli dla dowolnego elementu zbioru $x \in A$ zachodzi nierówność:

$$x \leqslant M.$$

$\{0,1,2,3,4,5\}$ np. $M=5$, $M=7$

Zbiór ograniczony $0 \notin \mathbb{N}$

$\mathbb{N}$ np. $m = 1$ nie ma ograniczenia górnego

Definicja

Powiemy, że zbiór $A \subseteq \mathbb{R}$ jest ograniczony z góry przez $M \in \mathbb{R}$ jeśli dla dowolnego elementu zbioru $x \in A$ zachodzi nierówność:

$$x \leqslant M.$$

Definicja

Powiemy, że zbiór $A \subseteq \mathbb{R}$ jest ograniczony z dołu przez $m \in \mathbb{R}$ jeśli dla dowolnego elementu zbioru $x \in A$ zachodzi nierówność:

$$x \geqslant m.$$

$\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ np. $m = 0$, $m = -1$

Kres górny

Definicja

Powiemy, że M jest kresem górnym ograniczonego zbioru $A \subseteq \mathbb{R}$, jeśli M jest najmniejszym ograniczeniem górnym zbioru A.

Oznaczenie

$\sup A$

$A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ np. $M = 5$, $M = 7$

$\sup A = 5$

Kres górny

Definicja

Powiemy, że M jest kresem górnym ograniczonego zbioru $A \subseteq \mathbb{R}$, jeśli M jest najmniejszym ograniczeniem górnym zbioru A.

Oznaczenie

$\sup A$

Aksjomat ciągłości

Ograniczony z góry podzbiór liczb rzeczywistych zawsze posiada kres górny.

Kres dolny

Definicja

Powiemy, że m jest kresem dolnym ograniczonego zbioru $A \subseteq \mathbb{R}$, jeśli m jest największym ograniczeniem dolnym zbioru A.

Oznaczenie

$\inf A$

$A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ np. $m = 0$ $m = -1$ $m = -20$

$\inf A = 0$

Kres dolny

Definicja

Powiemy, że m jest kresem dolnym ograniczonego zbioru $A \subseteq \mathbb{R}$, jeśli m jest największym ograniczeniem dolnym zbioru A.

Oznaczenie

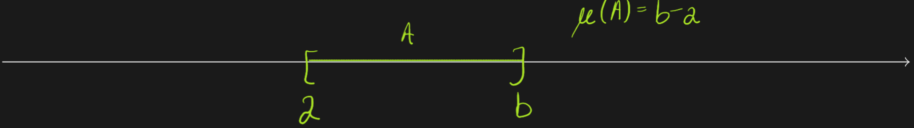
$\inf A$

Aksjomat ciągłości

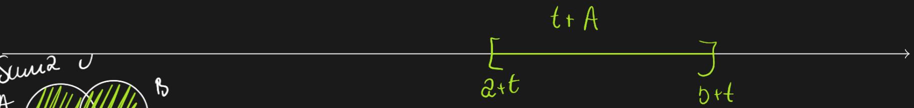
Ograniczony z dołu podzbiór liczb rzeczywistych zawsze posiada kres dolny.

Próba zmierzenia zbioru

$\mu(A) = b-a$



$\mu(t+A)=\mu(A)$



Suma $\cup$

Przecięcie $\cap$

$\mu(A \sqcup B) = \mu(A) + \mu(B)$

Oznaczenie $A \sqcup B = A \cup B$, przy założeniu że $A \cap B = \emptyset$

Robocza definicja miary

μ – mi

$\mathcal{P}(\mathbb{R})$ – podzbiory liczb rzeczywistych

$\to [0, +\infty]$

$\mu(\mathbb{R}) = +\infty$

Pierwsze podejście

Niech $\mu : \mathcal{P}(\mathbb{R}) \to [0, +\infty]$ będzie funkcją taką, że:

1. $\mu(\varnothing) = 0$

Robocza definicja miary

Pierwsze podejście

Niech $\mu : \mathcal{P}(\mathbb{R}) \to [0, +\infty]$ będzie funkcją taką, że:

1. $\mu(\varnothing) = 0$
2. $\mu([a, b]) = b - a$

Robocza definicja miary

$\bigcup$

Pierwsze podejście

Niech $\mu : \mathcal{P}(\mathbb{R}) \to [0, +\infty]$ będzie funkcją taką, że:

1. $\mu(\varnothing) = 0$
2. $\mu([a, b]) = b - a$
3. $\underbrace{\mu\left(\coprod_{n=1}^{+\infty} A_n\right)}_{\text{miara sumy}} = \underbrace{\sum_{n=1}^{+\infty} \mu(A_n)}_{\text{suma miar zbiorów}}$

suma rozłączna

Robocza definicja miary

Pierwsze podejście

Niech $\mu : \mathcal{P}(\mathbb{R}) \to [0, +\infty]$ będzie funkcją taką, że:

1. $\mu(\varnothing) = 0$
2. $\mu([a, b]) = b - a$
3. $\mu\left(\coprod_{n=1}^{+\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mu(A_n)$
4. $\forall\ S \in \mathcal{P}(\mathbb{R}) \quad \forall\ t \in \mathbb{R} \quad \underbrace{\mu(t + S)}_{\text{miara przesunięcia}} = \underbrace{\mu(S)}_{\text{miara oryginału}}.$

Robocza definicja miary

Pierwsze podejście

Niech $\mu : \mathcal{P}(\mathbb{R}) \to [0, +\infty]$ będzie funkcją taką, że:

1. $\mu(\varnothing) = 0$
2. $\mu([a, b]) = b - a$
3. $\mu\left(\coprod_{n=1}^{+\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mu(A_n)$
4. $\forall\, S \in \mathcal{P}(\mathbb{R}) \;\; \forall\, t \in \mathbb{R} \;\; \mu(t + S) = \mu(S)$.

to nie działa!

To nie działa!