Klasy wysokości dźwięków i heksachordy

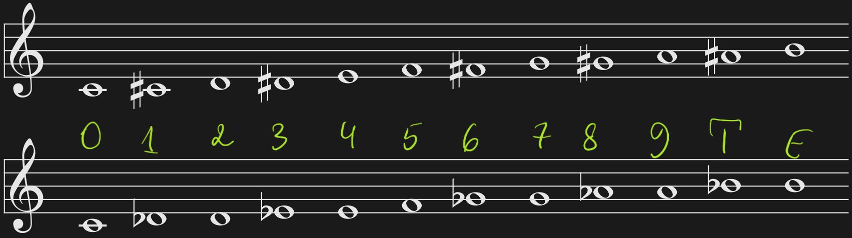
Matematyka dla ciekawych świata XV

Daniel Laskowski

Instytut Muzykologii UW

26.03.2024

Przypomnienie



Aksjomatyka teorii

Równoważność oktawowa

Dźwięki odległe o jedną oktawę lub więcej równych oktaw są w relacji równoważności.

Aksjomatyka teorii

Równoważność oktawowa

Dźwięki odległe o jedną oktawę lub więcej równych oktaw są w relacji równoważności.

Równoważnośc enharmoniczna

Dźwięki zależne enharmonicznie są równoważne.

Aksjomatyka teorii

Równoważność oktawowa

Dźwięki odległe o jedną oktawę lub więcej równych oktaw są w relacji równoważności.

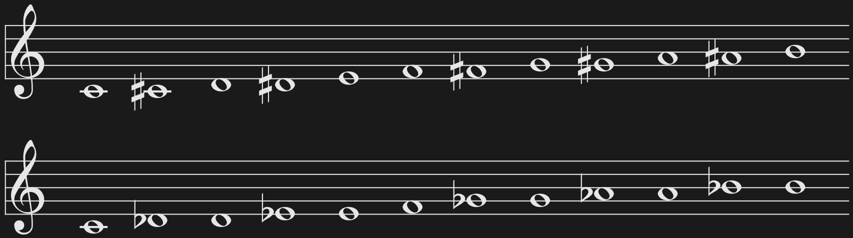
Równoważnośc enharmoniczna

Dźwięki zależne enharmonicznie są równoważne.

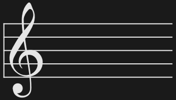
Wniosek

Równoważność oktawowa implikuje równoważność interwałową.

Klasyczna teoria w nowym języku



Klasyczna teoria w nowym języku



$0 - 7 = 5$

$7 - 0 = 7$

		interwał	
1	P1	0	
2 >	m2	1	1
2	M2	2	2
3 >	m3	3	
3	M3	4	
4	P4	5	
4 < /5 >	A4/d5	6	
5	P5	5	7
6 >	m6	4	
6	M6	3	
7	m7	2	
7 <	M7	1	
8	P8	0	

Zbiory klas wysokości dźwięku

Definicja

Zbiorem klas wysokości dźwięku, nazwiemy zbiór zawierający klasy wysokości dźwięków.

Zbiory klas wysokości dźwięku

Definicja

Zbiorem klas wysokości dźwięku, nazwiemy zbiór zawierający klasy wysokości dźwięków.

Przykład:

Zbiory klas wysokości dźwięku

Definicja

Zbiorem klas wysokości dźwięku, nazwiemy zbiór zawierający klasy wysokości dźwięków.

Przykład:

0 6 9
c, fis, a

Zbiory klas wysokości dźwięku

Definicja

Zbiorem klas wysokości dźwięku, nazwiemy zbiór zawierający klasy wysokości dźwięków.

Przykład:

c, fis, a $\qquad \{0, 6, 9\}$

Zbiory klas wysokości dźwięku

Definicja

Zbiorem klas wysokości dźwięku, nazwiemy zbiór zawierający klasy wysokości dźwięków.

Przykład:

$$\text{c, fis, a} \qquad \{0, 6, 9\}$$

Definicja

Dopełnieniem zbioru A nazywamy zbiór takich klas wysokości dźwięków, które do zbioru A nie należą. Takie dopełnienie oznaczamy $\overline{A}$.

Przykład:

Zbiory klas wysokości dźwięku

Definicja

Zbiorem klas wysokości dźwięku, nazwiemy zbiór zawierający klasy wysokości dźwięków.

Przykład:

$$\text{c, fis, a} \qquad \{0, 6, 9\}$$

Definicja

Dopełnieniem zbioru A nazywamy zbiór takich klas wysokości dźwięków, które do zbioru A nie należą. Takie dopełnienie oznaczamy $\overline{A}$.

Przykład:

$$\overline{\{0, 6, 9\}}$$

Zbiory klas wysokości dźwięku

Definicja

Zbiorem klas wysokości dźwięku, nazwiemy zbiór zawierający klasy wysokości dźwięków.

Przykład:

c, fis, a $\qquad \{0, 6, 9\}$

Definicja

Dopełnieniem zbioru A nazywamy zbiór takich klas wysokości dźwięków, które do zbioru A nie należą. Takie dopełnienie oznaczamy $\overline{A}$.

Przykład:

$$\overline{\{0, 6, 9\}} \qquad \{1, 2, 3, 4, 5, 7, 8, \mathrm{T}, \mathrm{E}\}$$

Forma normalna

$$T_{11}(\{2,4,5\}) = \{1,3,4\}$$

$$T_9(\{2,4,5\}) = \{E,1,2\}$$

Definicja

Formą normalną nazwiemy zapis zbioru klas wysokości dźwięku we wznoszącym porządku interwałowym i najbardziej skondensowanym pod względem interwałowym.

Przykłady

[3,5,6,9]

$\{3, 5, 6, 9\}$

6

3, 5, 6, 9

5, 6, 9, 3

3-5 = 10

6, 9, 3, 5

5-6 = 11

9, 3, 5, 6

6-9 = 9

Przykłady

[7, 8, T, 1, 4]

$\{1, 4, 7, 8, \mathrm{T}\}$

~~1, 4, 7, 8, T~~ 9 $\quad 8 - 1 = 7$

4, 7, 8, T, 1 $\quad 1 - 4 = 9 \quad 10 - 4 = 6 \quad 8 - 4 = 4$

7, 8, T, 1, 4 $\quad 4 - 7 = 9 \quad 1 - 7 = 6 \quad T - 7 = 3$

~~8, T, 1, 4, 7~~ $\quad 7 - 8 = 11$

~~T, 1, 4, 7, 8~~ $\quad 8 - 10 = 10$

Przykłady

[0, 4, 8]

$\{0, 4, 8\}$

0, 4, 8 $\quad 8 - 0 = 8 \quad 4 - 0 = 4$

4, 8, 0 $\quad 0 - 4 = 8 \quad 8 - 4 = 4$

8, 0, 4 $\quad 4 - 8 = 8 \quad 0 - 8 = 4$

Zawartość interwałowa

Definicja

Zawartością interwałową nazywamy kolekcję wszystkich interwałów, zawartych w zbiorze klas wysokości A, policzonych z krotnościami.

Zawartość interwałowa

Definicja

Zawartością interwałową nazywamy kolekcję wszystkich interwałów, zawartych w zbiorze klas wysokości A, policzonych z krotnościami.

Przykład:

Zawartość interwałowa

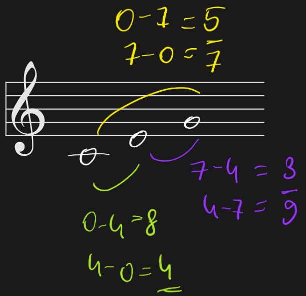
Definicja

Zawartością interwałową nazywamy kolekcję wszystkich interwałów, zawartych w zbiorze klas wysokości A, policzonych z krotnościami.

Przykład:

$$\{0, 4, 7\}$$

$$\langle 0, 0, 1, 1, 1, 0 \rangle$$



Jeszcze jeden przykład

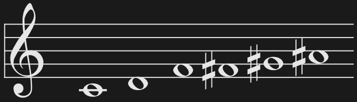
$\{0, 2, 5, 6, 8, T\}$

$\langle 1, 4, 2, 4, 2, 3 \rangle$

$\{1, 3, 4, 7, 9, E\}$

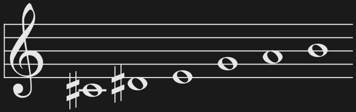
Jeszcze jeden przykład

$\{0, 2, 5, 6, 8, T\}$



$\langle 1, 4, 2, 4, 2, 3 \rangle$

$\{1, 3, 4, 7, 9, E\}$



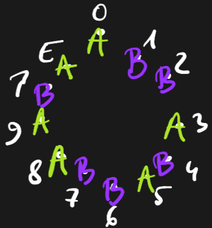
$\langle 1, 4, 2, 4, 2, 3 \rangle$

Twierdzenie o heksachordzie

Twierdzenie (M. Babbitt)

Niech H będzie heksachordem, a $\overline{H}$ jego dopełnieniem. Wówczas $\mathcal{I}_H = \mathcal{I}_{\overline{H}}$.

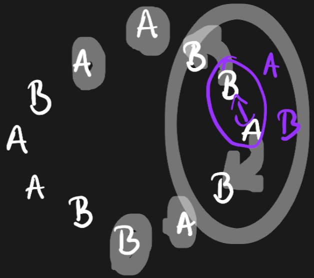
Dowód $H = A$ $\overline{H} = B$

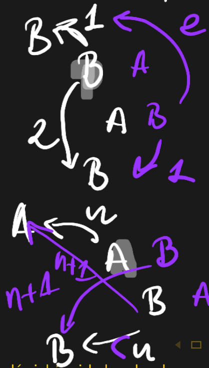


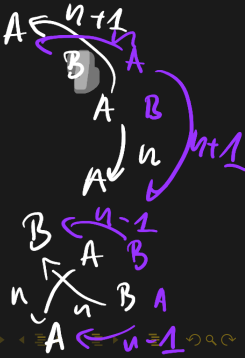
① $\{0,1,2,3,4,5\} \to$ dla niego działa

② Zamiana elementów nie wpływa na prawdziwość.

Załóżmy, że dla pewnego A działa

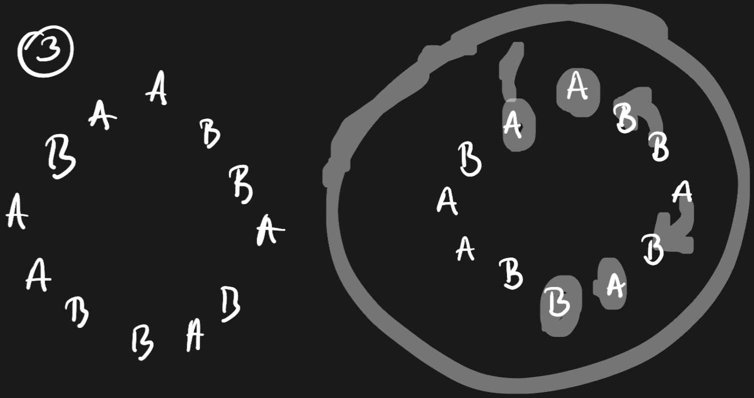






Dowód

3

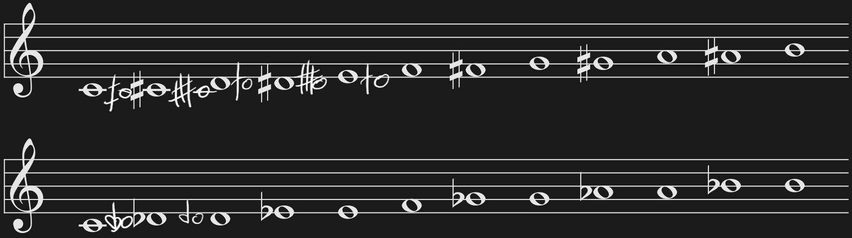


Co dalej?

$+\frac{1}{4}$ tonu

$+\frac{3}{4}$ tonu

$\mathbb{Z}_{24}$



$-\frac{1}{4}$ tonu

$-\frac{3}{4}$ tonu