

# Klasy wysokości dźwięków i heksachordy

*Matematyka dla ciekawych świata XV*

Daniel Laskowski

Instytut Muzykologii UW

26.03.2024

# Przypomnienie

The image displays two musical staves in treble clef. The top staff contains a sequence of notes: E4, F#4, G4, A4, B4, C5, D5, E5, F#5, G5, A5. The bottom staff contains a sequence of notes: E4, D4, C4, B3, A3, G3, F3, E3, D3, C3, B2. Below the bottom staff, a row of yellow text labels is aligned with the notes: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, T, E.

## Równoważność oktafowa

Dźwięki odległe o jedną oktafę lub więcej równych oktaf są w relacji równoważności.

## Równoważność oktafowa

Dźwięki odległe o jedną oktawę lub więcej równych oktaf są w relacji równoważności.

## Równoważność enharmoniczna

Dźwięki zależne enharmonicznie są równoważne.

## Równoważność oktafowa

Dźwięki odległe o jedną oktafę lub więcej równych oktaw są w relacji równoważności.

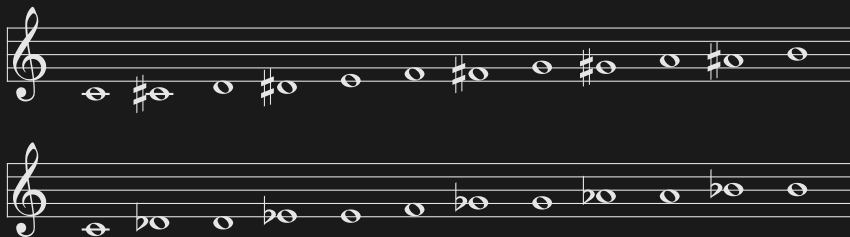
## Równoważność enharmoniczna

Dźwięki zależne enharmonicznie są równoważne.

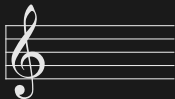
## Wniosek

Równoważność oktafowa implikuje równoważność interwałową.

# Klasyczna teoria w nowym języku



# Klasyczna teoria w nowym języku



$$0 - 7 = 5$$

$$7 - 0 = 7$$

			interwał	
1	P1	0		
2 >	m2	1	1	
2	M2	2	2	
3 >	m3	3		
3	M3	4		
4	P4	5		
4 < / 5 >	A4/d5	6		
5	P5	5	7	
6 >	m6	4		
6	M6	3		
7	m7	2		
7 <	M7	1		
8	P8	0		

# Zbiory klas wysokości dźwięku

## Definicja

Zbiorem klas wysokości dźwięku, nazwiemy zbiór zawierający klasy wysokości dźwięków.



# Zbiory klas wysokości dźwięku

## Definicja

Zbiorem klas wysokości dźwięku, nazwiemy zbiór zawierający klasy wysokości dźwięków.

Przykład:

# Zbiory klas wysokości dźwięku

## Definicja

Zbiorem klas wysokości dźwięku, nazwiemy zbiór zawierający klasy wysokości dźwięków.

Przykład:

$\circ$   $\circ$   $\circ$   
c, fis, a

# Zbiory klas wysokości dźwięku

## Definicja

Zbiorem klas wysokości dźwięku, nazwiemy zbiór zawierający klasy wysokości dźwięków.

Przykład:

c, fis, a      {0, 6, 9}

# Zbiory klas wysokości dźwięku

## Definicja

Zbiorem klas wysokości dźwięku, nazwiemy zbiór zawierający klasy wysokości dźwięków.

Przykład:

c, fis, a      {0, 6, 9}

## Definicja

Dopełnieniem zbioru  $A$  nazywamy zbiór takich klas wysokości dźwięków, które do zbioru  $A$  nie należą. Takie dopełnienie oznaczamy  $\bar{A}$ .

Przykład:

# Zbiory klas wysokości dźwięku

## Definicja

Zbiorem klas wysokości dźwięku, nazwiemy zbiór zawierający klasy wysokości dźwięków.

Przykład:

c, fis, a       $\{0, 6, 9\}$

## Definicja

Dopełnieniem zbioru  $A$  nazywamy zbiór takich klas wysokości dźwięków, które do zbioru  $A$  nie należą. Takie dopełnienie oznaczamy  $\overline{A}$ .

Przykład:

$\overline{\{0, 6, 9\}}$

# Zbiory klas wysokości dźwięku

## Definicja

Zbiorem klas wysokości dźwięku, nazwiemy zbiór zawierający klasy wysokości dźwięków.

Przykład:

c, fis, a      {0, 6, 9}

## Definicja

Dopełnieniem zbioru  $A$  nazywamy zbiór takich klas wysokości dźwięków, które do zbioru  $A$  nie należą. Takie dopełnienie oznaczamy  $\overline{A}$ .

Przykład:

$\overline{\{0, 6, 9\}}$       {1, 2, 3, 4, 5, 7, 8, T, E}

# Forma normalna

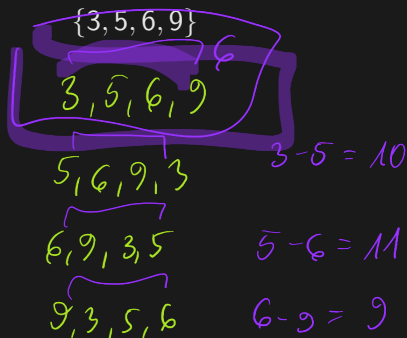
$$T_{11}(\{2,4,5\}) = \{1,3,4\}$$

$$T_9(\{2,4,5\}) = \{E,1,2\}$$

## Definicja

Formą normalną nazwiemy zapis zbioru klas wysokości dźwięku we wznoszącym porządku interwałowym i najbardziej skondensowanym pod względem interwałowym.

[3,5,6,9]





# Przykłady

[7, 8, T, 1, 4]

{1, 4, 7, 8, T}

~~1, 4, 7, 8, T~~ 8-1=7

~~4, 7, 8, T, 1~~ 1-4=9 10-4=6 8-4=4

~~7, 8, T, 1, 4~~ 4-7=9 1-7=6 T-7=3

~~8, T, 1, 4, 7~~ 7-8=11

~~T, 1, 4, 7, 8~~ 8-10=10

$[0, 4, 8]$

$\{0, 4, 8\}$

$0, 4, 8$

$$8 - 0 = 8$$

$$4 - 0 = 4$$

$4, 8, 0$

$$0 - 4 = 8$$

$$8 - 4 = 4$$

$8, 0, 4$

$$4 - 8 = 8$$

$$0 - 8 = 4$$

## Definicja

Zawartością interwałową nazywamy kolekcję wszystkich interwałów, zawartych w zbiorze klas wysokości  $A$ , policzonych z krotnościami.

## Definicja

Zawartością interwałową nazywamy kolekcję wszystkich interwałów, zawartych w zbiorze klas wysokości  $A$ , policzonych z krotnościami.

Przykład:

# Zawartość interwałowa

## Definicja

Zawartością interwałową nazywamy kolekcję wszystkich interwałów, zawartych w zbiorze klas wysokości  $A$ , policzonych z krotnościami.

Przykład:

$\{0, 4, 7\}$

$\langle 0, 0, 4, 4, 4, 0 \rangle$

A musical staff with a treble clef showing three notes: C4, E4, and G4. Handwritten calculations in yellow and purple ink are present:

- $0-7=5$
- $7-0=\bar{7}$
- $7-4=3$
- $4-7=\bar{9}$
- $0-4=8$
- $4-0=4$

# Jeszcze jeden przykład

A musical staff in treble clef showing a sequence of notes: G4, A4, B4, C5, B4, A4, G4. The notes are annotated with handwritten numbers and arcs. Above the staff, a purple arc connects G4 and B4, with the number '6' written above it. A yellow arc connects A4 and C5, with the number '4' written above it. Below the staff, a purple arc connects G4 and A4, with the number '2' written below it. A yellow arc connects B4 and C5, with the number '3' written below it. A purple arc connects A4 and B4, with the number '3' written below it. A yellow arc connects B4 and C5, with the number '4' written below it. A purple arc connects C5 and B4, with the number '4' written below it. A yellow arc connects B4 and A4, with the number '2' written below it. A purple arc connects A4 and G4, with the number '3' written below it. A yellow arc connects G4 and A4, with the number '5' written below it. Above the staff, the set  $\{0, 2, 5, 6, 8, T\}$  is written. Below the staff, the set  $\langle 1, 4, 2, 4, 2, 3 \rangle$  is written.

$\{1, 3, 4, 7, 9, E\}$

# Jeszcze jeden przykład

{0, 2, 5, 6, 8, T}



⟨1, 4, 2, 4, 2, 3⟩

{1, 3, 4, 7, 9, E}



⟨1, 4, 2, 4, 2, 3⟩

# Twierdzenie o heksachordzie

## Twierdzenie (M. Babbitt)

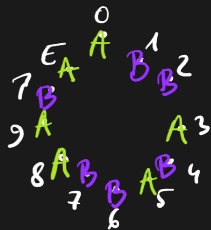
Niech  $H$  będzie heksachordem, a  $\overline{H}$  jego dopełnieniem. Wówczas  $\mathcal{I}_H = \mathcal{I}_{\overline{H}}$ .



Dowód

$H = A$

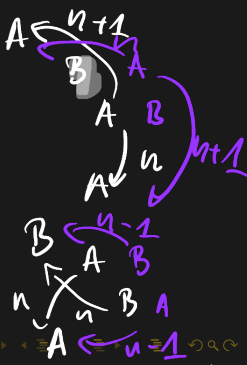
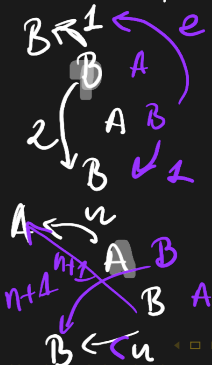
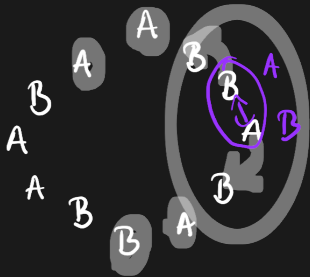
$\bar{H} = B$



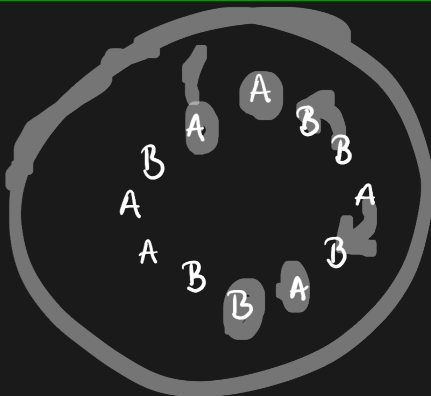
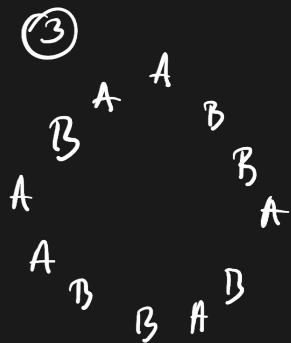
①  $\{0, 1, 2, 3, 4, 5\} \rightarrow$  dla niego działa

② Zamiana elementów nie wpływa na prawdziwość.

Załóżmy, że dla pewnego  $A$  działa



# Dowód

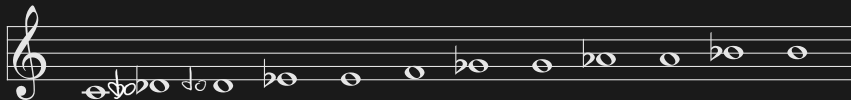


# Co dalej?

$\nabla + \frac{1}{4} \text{ tonu}$

$\sharp + \frac{3}{4} \text{ tonu}$

$\nabla \nabla$



$\flat - \frac{1}{4} \text{ tonu}$

$\downarrow - \frac{3}{4} \text{ tonu}$