Dziwne dodawanie, czyli trochę o grupach

Matematyka dla ciekawych świata XV

Daniel Laskowski

Instytut Muzykologii UW

04.03.2024

Coś prostego

Zacznijmy od łatwych obliczeń

$1+1=$

Coś prostego

Zacznijmy od łatwych obliczeń

$$1+1=2$$

Coś prostego

Zacznijmy od łatwych obliczeń

$1+1=2$

$7+8=$

Coś prostego

Zacznijmy od łatwych obliczeń

$$1+1=2$$

$$7+8=15$$

Coś prostego

Zacznijmy od łatwych obliczeń

$1+1=2$

$7+8=15$

$20+7=$

Coś prostego

Zacznijmy od łatwych obliczeń

$1+1=2$

$7+8=15$

$20+7=27$

Coś prostego

Zacznijmy od łatwych obliczeń

$1+1=2$

$7+8=15$

$20+7=27$

A co gdyby to były godziny?

Godzinę po godzinie 1.00 jest

Coś prostego

Zacznijmy od łatwych obliczeń

1+1=2

7+8=15

20+7=27

A co gdyby to były godziny?

Godzinę po godzinie 1.00 jest 1+1

Coś prostego

Zacznijmy od łatwych obliczeń

$1+1=2$

$7+8=15$

$20+7=27$

A co gdyby to były godziny?

Godzinę po godzinie 1.00 jest 2.00

Coś prostego

Zacznijmy od łatwych obliczeń

$1+1=2$

$7+8=15$

$20+7=27$

A co gdyby to były godziny?

Godzinę po godzinie 1.00 jest 2.00

8 godzin po godzinie 7.00 jest

Coś prostego

Zacznijmy od łatwych obliczeń

1+1=2

7+8=15

20+7=27

A co gdyby to były godziny?

Godzinę po godzinie 1.00 jest 2.00

8 godzin po godzinie 7.00 jest 7+8

Coś prostego

Zacznijmy od łatwych obliczeń

$1+1=2$

$7+8=15$

$20+7=27$

A co gdyby to były godziny?

Godzinę po godzinie 1.00 jest 2.00

8 godzin po godzinie 7.00 jest 15.00

Coś prostego

Zacznijmy od łatwych obliczeń

1+1=2

7+8=15

20+7=27

A co gdyby to były godziny?

Godzinę po godzinie 1.00 jest 2.00

8 godzin po godzinie 7.00 jest 15.00

7 godzin po godzinie 20.00 jest

Coś prostego

Zacznijmy od łatwych obliczeń

$1+1=2$

$7+8=15$

$20+7=27$

A co gdyby to były godziny?

Godzinę po godzinie 1.00 jest 2.00

8 godzin po godzinie 7.00 jest 15.00

7 godzin po godzinie 20.00 jest 20+7

Coś prostego

Zacznijmy od łatwych obliczeń

$1+1=2$

$7+8=15$

$20+7=27$

A co gdyby to były godziny?

Godzinę po godzinie 1.00 jest 2.00

8 godzin po godzinie 7.00 jest 15.00

7 godzin po godzinie 20.00 jest 20+7

Grupy

Definicja (grupa):

Niech G będzie zbiorem, a $\oplus$ będzie funkcją $\oplus : G \times G \to G$. Parę $(G, \oplus)$ nazwiemy grupą, gdy:

1. Działanie jest łączne, to znaczy dla dowolnych $a, b, c \in G$ zachodzi równość:
$$(a \oplus b) \oplus c = a + (b \oplus c)\,,$$
2. Istnieje element neutralny w grupie G, to znaczy istnieje $e \in G$ takie, że dla dowolnego $a \in G$ zachodzi:
$$a \oplus e = e \oplus a = a,$$
3. Dla dowolnego $a \in G$ istnieje element odwrotny $-a \in G$, to znaczy taki, że:
$$a \oplus (-a) = (-a) \oplus a = e.$$

Przykłady

To są grupy:

Przykłady

To są grupy:

1° $(\mathbb{R}, +)$

Przykłady

To są grupy:

1° $(\mathbb{R}, +)$

2° $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot)$

Przykłady

To są grupy:

1° $(\mathbb{R}, +)$

2° $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot)$

3° $(\mathbb{Z}, +)$

Przykłady

To są grupy:

1° $(\mathbb{R}, +)$

2° $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot)$

3° $(\mathbb{Z}, +)$

4° $(\{e\}, \oplus)$

Przykłady

To są grupy:

1° $(\mathbb{R}, +)$

2° $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot)$

3° $(\mathbb{Z}, +)$

4° $(\{e\}, \oplus)$

To nie są grupy:

1° $(\mathbb{N}, +)$

Przykłady

To są grupy:

1° $(\mathbb{R}, +)$

2° $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot)$

3° $(\mathbb{Z}, +)$

4° $(\{e\}, \oplus)$

To nie są grupy:

1° $(\mathbb{N}, +)$

2° $(\mathbb{Z}, \cdot)$

Przykłady

To są grupy:

1° $(\mathbb{R}, +)$

2° $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot)$

3° $(\mathbb{Z}, +)$

4° $(\{e\}, \oplus)$

To nie są grupy:

1° $(\mathbb{N}, +)$

2° $(\mathbb{Z}, \cdot)$

3° $(\mathbb{Z} \setminus \{0\}, +)$

Pewna szczególna grupa

Grupa $(\mathbb{Z}_p, +)$

Niech p będzie liczbą naturalną taką, że $p \geqslant 2$. Połóżmy $\mathbb{Z}_p = \{0, 1, 2, 3, ..., p-1\}$ i zdefiniujmy działanie dodawania, którego wynikiem jest reszta z dzielenia przez p wyniku „klasycznego” dodawania liczb całkowitych. Taką grupę nazwiemy $(\mathbb{Z}_p, +)$.

Pewna szczególna grupa

Grupa $(\mathbb{Z}_p, +)$

Niech p będzie liczbą naturalną taką, że $p \geqslant 2$. Połóżmy $\mathbb{Z}_p = \{0, 1, 2, 3, ..., p-1\}$ i zdefiniujmy działanie dodawania, którego wynikiem jest reszta z dzielenia przez p wyniku „klasycznego" dodawania liczb całkowitych. Taką grupę nazwiemy $(\mathbb{Z}_p, +)$.

Przykłady w grupie $\mathbb{Z}_{12}$:

$$1 + 3 =$$

Pewna szczególna grupa

Grupa $(\mathbb{Z}_p, +)$

Niech p będzie liczbą naturalną taką, że $p \geqslant 2$. Połóżmy $\mathbb{Z}_p = \{0, 1, 2, 3, ..., p-1\}$ i zdefiniujmy działanie dodawania, którego wynikiem jest reszta z dzielenia przez p wyniku „klasycznego” dodawania liczb całkowitych. Taką grupę nazwiemy $(\mathbb{Z}_p, +)$.

Przykłady w grupie $\mathbb{Z}_{12}$:

$$1 + 3 = 4$$

Pewna szczególna grupa

Grupa $(\mathbb{Z}_p, +)$

Niech p będzie liczbą naturalną taką, że $p \geqslant 2$. Położmy $\mathbb{Z}_p = \{0, 1, 2, 3, ..., p-1\}$ i zdefiniujmy działanie dodawania, którego wynikiem jest reszta z dzielenia przez p wyniku „klasycznego" dodawania liczb całkowitych. Taką grupę nazwiemy $(\mathbb{Z}_p, +)$.

Przykłady w grupie $\mathbb{Z}_{12}$:

$$1 + 3 = 4$$

$$0 + 7 =$$

Pewna szczególna grupa

Grupa $(\mathbb{Z}_p, +)$

Niech p będzie liczbą naturalną taką, że $p \geqslant 2$. Połóżmy $\mathbb{Z}_p = \{0, 1, 2, 3, ..., p-1\}$ i zdefiniujmy działanie dodawania, którego wynikiem jest reszta z dzielenia przez p wyniku „klasycznego" dodawania liczb całkowitych. Taką grupę nazwiemy $(\mathbb{Z}_p, +)$.

Przykłady w grupie $\mathbb{Z}_{12}$:

$$1 + 3 = 4$$

$$0 + 7 = 7$$

Pewna szczególna grupa

Grupa $(\mathbb{Z}_p, +)$

Niech p będzie liczbą naturalną taką, że $p \geqslant 2$. Połóżmy $\mathbb{Z}_p = \{0, 1, 2, 3, ..., p-1\}$ i zdefiniujmy działanie dodawania, którego wynikiem jest reszta z dzielenia przez p wyniku „klasycznego" dodawania liczb całkowitych. Taką grupę nazwiemy $(\mathbb{Z}_p, +)$.

Przykłady w grupie $\mathbb{Z}_{12}$:

$$1 + 3 = 4$$

$$0 + 7 = 7$$

$$6 + 8 =$$

Pewna szczególna grupa

Grupa $(\mathbb{Z}_p, +)$

Niech p będzie liczbą naturalną taką, że $p \geqslant 2$. Połóżmy $\mathbb{Z}_p = \{0, 1, 2, 3, ..., p-1\}$ i zdefiniujmy działanie dodawania, którego wynikiem jest reszta z dzielenia przez p wyniku „klasycznego” dodawania liczb całkowitych. Taką grupę nazwiemy $(\mathbb{Z}_p, +)$.

Przykłady w grupie $\mathbb{Z}_{12}$:

$$1 + 3 = 4$$

$$0 + 7 = 7$$

$$6 + 8 = 2$$

Pewna szczególna grupa

Grupa $(\mathbb{Z}_p, +)$

Niech p będzie liczbą naturalną taką, że $p \geqslant 2$. Połóżmy $\mathbb{Z}_p = \{0, 1, 2, 3, ..., p-1\}$ i zdefiniujmy działanie dodawania, którego wynikiem jest reszta z dzielenia przez p wyniku „klasycznego" dodawania liczb całkowitych. Taką grupę nazwiemy $(\mathbb{Z}_p, +)$.

Przykłady w grupie $\mathbb{Z}_{12}$:

$$1 + 3 = 4$$

$$0 + 7 = 7$$

$$6 + 8 = 2$$

$$9 + (-3) =$$

Pewna szczególna grupa

Grupa $(\mathbb{Z}_p, +)$

Niech p będzie liczbą naturalną taką, że $p \geqslant 2$. Połóżmy $\mathbb{Z}_p = \{0, 1, 2, 3, ..., p-1\}$ i zdefiniujmy działanie dodawania, którego wynikiem jest reszta z dzielenia przez p wyniku „klasycznego” dodawania liczb całkowitych. Taką grupę nazwiemy $(\mathbb{Z}_p, +)$.

Przykłady w grupie $\mathbb{Z}_{12}$:

$$1 + 3 = 4$$

$$0 + 7 = 7$$

$$6 + 8 = 2$$

$$9 - 3 = 6$$

Pewna szczególna grupa

Grupa $(\mathbb{Z}_p, +)$

Niech p będzie liczbą naturalną taką, że $p \geqslant 2$. Połóżmy $\mathbb{Z}_p = \{0, 1, 2, 3, ..., p-1\}$ i zdefiniujmy działanie dodawania, którego wynikiem jest reszta z dzielenia przez p wyniku „klasycznego" dodawania liczb całkowitych. Taką grupę nazwiemy $(\mathbb{Z}_p, +)$.

Przykłady w grupie $\mathbb{Z}_{12}$:

$$1 + 3 = 4$$

$$0 + 7 = 7$$

$$6 + 8 = 2$$

$$9 - 3 = 6$$

$$4 - 7 =$$

Pewna szczególna grupa

Grupa $(\mathbb{Z}_p, +)$

Niech p będzie liczbą naturalną taką, że $p \geqslant 2$. Połóżmy $\mathbb{Z}_p = \{0, 1, 2, 3, ..., p-1\}$ i zdefiniujmy działanie dodawania, którego wynikiem jest reszta z dzielenia przez p wyniku „klasycznego” dodawania liczb całkowitych. Taką grupę nazwiemy $(\mathbb{Z}_p, +)$.

Przykłady w grupie $\mathbb{Z}_{12}$:

$$1 + 3 = 4$$

$$0 + 7 = 7$$

$$6 + 8 = 2$$

$$9 - 3 = 6$$

$$4 - 7 = 9$$

Intuicja

Drugie ważne pojęcie

Wyobraźmy sobie zbiór:

$$\{☺, ♪, \Psi, \Leftarrow, ☻, \longrightarrow, \bullet, ☹, \blacktriangle, 𝅗𝅥, \triangle, ♩\}\,.$$

Drugie ważne pojęcie

Wyobraźmy sobie zbiór:

$$\{\smiley, \eighthnote, \Psi, \Leftarrow, \blacksmiley, \longrightarrow, \CIRCLE, \frownie, \blacktriangle, \halfnote, \triangle, \quarternote\}\,.$$

Relacje równoważności

Definicja (relacja równoważności):

Relacja $\sim$ na zbiorze S jest relacją równoważności, jeśli jest:

1. zwrotna, to znaczy dla dowolnego elementu $a \in S$ mamy:
$$a \sim a,$$
2. symetryczna, to znaczy dla dowolnych elementów $a, b \in S$:
$$a \sim b \Leftrightarrow b \sim a,$$
3. przechodnia, to znaczy dla dowolnych elementów $a, b, c \in S$:
$$a \sim b \wedge b \sim c \Rightarrow a \sim c.$$

Przykłady

1° Relacja $=$ na zbiorze $\mathbb{R}$

Przykłady

1° Relacja $=$ na zbiorze $\mathbb{R}$

2° Przystawanie trójkątów

Przykłady

1° Relacja $=$ na zbiorze $\mathbb{R}$

2° Przystawanie trójkątów

3° Podobieństwo trójkątów

Przykłady

1° Relacja $=$ na zbiorze $\mathbb{R}$

2° Przystawanie trójkątów

3° Podobieństwo trójkątów

4° Relacja $\sim$ na zbiorze ludzi, zdefiniowana jako:

$$a \sim b \Leftrightarrow a \text{ ma tak samo na imię jak } b$$

Przykłady

1° Relacja $=$ na zbiorze $\mathbb{R}$

2° Przystawanie trójkątów

3° Podobieństwo trójkątów

4° Relacja $\sim$ na zbiorze ludzi, zdefiniowana jako:

$$a \sim b \Leftrightarrow a \text{ ma tak samo na imię jak } b$$

5° Relacja $\sim$ na zbiorze ludzi, zdefiniowana jako:

$$a \sim b \Leftrightarrow a \text{ jest bratem } b$$

Przykłady

1° Relacja $=$ na zbiorze $\mathbb{R}$

2° Przystawanie trójkątów

3° Podobieństwo trójkątów

4° Relacja $\sim$ na zbiorze ludzi, zdefiniowana jako:

$$a \sim b \Leftrightarrow a \text{ ma tak samo na imię jak } b$$

5° Relacja $\sim$ na zbiorze ludzi, zdefiniowana jako:

$$a \sim b \Leftrightarrow a \text{ jest bratem } b$$

nie jest relacją równoważności.

Abstrakcja

Definicja (klasa abstrakcji)

Niech S będzie zbiorem, na którym zdefiniowano relację równoważności $\sim$. Klasą abstrakcji elementu $a \in S$ w relacji $\sim$ nazwiemy zbiór wszystkich elementów S będących w relacji $\sim$ z a.

Oznaczenie

$[a]_\sim$

Abstrakcja

Definicja (klasa abstrakcji)

Niech S będzie zbiorem, na którym zdefiniowano relację równoważności $\sim$. Klasą abstrakcji elementu $a \in S$ w relacji $\sim$ nazwiemy zbiór wszystkich elementów S będących w relacji $\sim$ z a.

Oznaczenie

$[a]_\sim$

Definicja (zbiór ilorazowy)

Zbiorem ilorazowym nazwiemy zbiór wszystkich klas abstrakcji.

Oznaczenie

$S/_\sim$

Przykład

$$\{☺, ♪, \Psi, \Leftarrow, ☻, \longrightarrow, \bullet, ☹, \blacktriangle, 𝅗𝅥, \triangle, ♩\}.$$

W naszej pierwszej relacji:

- $[☺]_\sim = \{☺, ☻, ☹\}$

Przykład

$$\{\smiley, \eighthnote, \Psi, \Leftarrow, \blacksmiley, \rightarrow, \CIRCLE, \frownie, \blacktriangle, \halfnote, \triangle, \quarternote\}\,.$$

W naszej pierwszej relacji:

- $[\smiley]_\sim = \{\smiley, \blacksmiley, \frownie\}$
- $[\eighthnote]_\sim = \{\eighthnote, \quarternote, \halfnote\}$

Przykład

$$\{\smiley, \eighthnote, \Psi, \Leftarrow, \blacksmiley, \rightarrow, \CIRCLE, \frownie, \blacktriangle, \halfnote, \triangle, \quarternote\}\,.$$

W naszej pierwszej relacji:

- $[\smiley]_\sim = \{\smiley, \blacksmiley, \frownie\}$
- $[\eighthnote]_\sim = \{\eighthnote, \quarternote, \halfnote\}$
- $[\Psi]_\sim = \{\Psi\}$

Przykład

$$\{\smiley, \eighthnote, \Psi, \Leftarrow, \blacksmiley, \longrightarrow, \CIRCLE, \frownie, \blacktriangle, \halfnote, \triangle, \quarternote\}.$$

W naszej pierwszej relacji:

- $[\smiley]_\sim = \{\smiley, \blacksmiley, \frownie\}$
- $[\eighthnote]_\sim = \{\eighthnote, \quarternote, \halfnote\}$
- $[\Psi]_\sim = \{\Psi\}$
- $[\Leftarrow]_\sim = \{\Leftarrow, \longrightarrow\}$

Przykład

$$\{\smiley, \eighthnote, \Psi, \Leftarrow, \blacksmiley, \rightarrow, \CIRCLE, \frownie, \blacktriangle, \halfnote, \triangle, \quarternote\}.$$

W naszej pierwszej relacji:

- $[\smiley]_\sim = \{\smiley, \blacksmiley, \frownie\}$
- $[\eighthnote]_\sim = \{\eighthnote, \quarternote, \halfnote\}$
- $[\Psi]_\sim = \{\Psi\}$
- $[\Leftarrow]_\sim = \{\Leftarrow, \rightarrow\}$
- $[\CIRCLE]_\sim = \{\CIRCLE, \blacktriangle, \triangle\}$

Przykład

$$\{\smiley, \eighthnote, \Psi, \Leftarrow, \blacksmiley, \rightarrow, \CIRCLE, \frownie, \blacktriangle, \halfnote, \triangle, \quarternote\}.$$

W naszej pierwszej relacji:

- $[\smiley]_\sim = \{\smiley, \blacksmiley, \frownie\}$
- $[\eighthnote]_\sim = \{\eighthnote, \quarternote, \halfnote\}$
- $[\Psi]_\sim = \{\Psi\}$
- $[\Leftarrow]_\sim = \{\Leftarrow, \rightarrow\}$
- $[\CIRCLE]_\sim = \{\CIRCLE, \blacktriangle, \triangle\}$

oraz:

$$\{\smiley, \eighthnote, \Psi, \Leftarrow, \blacksmiley, \rightarrow, \CIRCLE, \frownie, \blacktriangle, \halfnote, \triangle, \quarternote\}/\sim\; = \{[\smiley]_\sim, [\eighthnote]_\sim, [\Psi]_\sim, [\Leftarrow]_\sim, [\CIRCLE]_\sim\}.$$