

# Matematyka dla Ciekawych Świata XV — lista 2

## Notacja muzyczna i klasy wysokości dźwięku

Daniel Laskowski

marzec 2024

### 1 Powtórzenie z wykładu

#### 1.1 Notacja muzyczna

Współczesna notacja muzyczna jest notacją *menzuralną*, to znaczy, że z wyglądu nuty jesteśmy w stanie jednoznacznie odczytać jej długość (na wykładzie dowiedzieliśmy się, że nie zawsze tak było!). W ogólności, używane dzisiaj wartości rytmiczne co do zasady są *dwudzielne* – każda kolejna wartość rytmiczna jest dwa razy krótsza od poprzedniej. Za najdłuższą przyjmujemy zazwyczaj *całą nutę* oznaczaną jako  $\circ$ , która dzieli się na dwie *półnuty* oznaczane  $\downarrow$ . Półnuta dzieli się na dwie *ćwierćnuty* ( $\downarrow$ ), ćwierćnuta na dwie *ósemki* ( $\downarrow$ ), ósemka na dwie *szesnastki* ( $\downarrow$ ), szesnastka na dwie *trzydziestodwójki* ( $\downarrow$ ), a trzydziestodwójka na dwie *sześćdziesiątki czwórki* ( $\downarrow$ ). Do każdej wartości rytmicznej możemy dostawić kropkę, która wydłuża ją o połowę, czyli na przykład  $\downarrow$  będzie odpowiadać długości ćwierćnuty i ósemki (czyli trzech ósemek).

Wysokości dźwięków odczytujemy natomiast z umiejscowienia nut na pięciolinii. W polskim i germańskim kręgu kulturowym do nazywania dźwięków używamy kolejno liter  $c, d, e, f, g, a$  oraz  $h$  (po dźwięku  $h$  następuje ponownie dźwięk  $c$  i cykl się powtarza – mówimy wtedy, że oba te dźwięki  $c$  znajdują się w ogległości oktawy od siebie, co szerzej zostanie omówione na późniejszych wykładach). Informację o tym, który dźwięk znajduje się na której linii przekazują klucze, z których dziś używamy trzech typów:



klucz  $G$



klucz  $F$



klucz  $C$

jego początek wskazuje dźwięk  $g$    jego początek wskazuje dźwięk  $f$    jego środek wskazuje dźwięk  $c$

Zatem na przykład, gdy umieścimy klucz  $G$  w następujący sposób:



dźwięk  $g$  będzie znajdować się na drugiej linii. Taki klucz nazwiemy kluczem *wiolinowym*.

Zapis kolejno dźwięków  $c, d, e, f, g, a$  oraz  $h$  będzie wyglądał zatem następująco:



Odległości między dźwiękami nazywamy *interwałami* i mierzymy je w *półtonach* (tzn. każdy interwał składa się z pewnej liczby półtonów). W większości przypadków dwa kolejne dźwięki w naszej skali znajdują się w odległości całego tonu od siebie (czyli dwóch półtonów). Wyjątkiem są dźwięki  $e$  i  $f$ , oraz  $h$  i  $c$ , które dzieli od siebie półton. Aby zatem zapisać pełnię wszystkich (na ten moment) możliwości, potrzebujemy symboli, które pozwolą nam zapisać, np. dźwięk pół tonu wyższy od  $c$ . Są nimi krzyżyk ( $\sharp$ ), który podwyższa dźwięk o pół tonu, a także bemol ( $\flat$ ), który obniża dźwięk o półtonu. W ten sposób, w obrębie oktawy możemy uzyskać następujące 12 dźwięków:



Jak łatwo zauważyć, dźwięk  $c$  podwyższony o pół tonu, to to samo co  $d$  o pół tonu obniżony, zatem alternatywnie możemy zapisać ciąg 12 dźwięków z użyciem bemoli (taką równoważność nazywamy *enharmonią*):



Dźwięki z krzyżykiem nazywamy poprzez dodanie końcówki *-is* do oryginalnej nazwy dźwięku, na przykład  $c$  z krzyżykiem to *cis*. Dźwięki z bemolem nazywamy poprzez dodanie końcówki *-es* do oryginalnej nazwy dźwięku, np.  $d$  z bemolem to *des*. Tutaj pojawiają się jednak trzy wyjątki –  $a$  i  $e$  z bemolem to odpowiednio *as* i *es* (dodajemy tylko *-s*), natomiast  $h$  z bemolem, to po prostu  $b$ .

## 1.2 Klasy wysokości dźwięku

Na wykładzie poznaliśmy definicję *zbioru klas wysokości dźwięku*. Powstała ona w wyniku przypisania poszczególnym dźwiękom skali diatonicznej oznaczeń 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, T oraz E. Za dwa podstawowe założenia przyjęliśmy fakt, że za równoważne uznajemy dźwięki równoległe o oktawę i będące ze sobą w enharmonii. Ponadto nieistotna była dla nas ich kolejność. Zauważyliśmy również, że dźwięki można transponować – transpozycję dźwięku  $a$  o  $n$  tonów w górę oznaczyliśmy jako  $T_n(a)$ , a cały zbiór – poddać inwersji – wtedy inwersję dźwięku  $a$  z transpozycją o  $n$  dźwięków zaznaczaliśmy jako  $T_n I(a)$ . Następnie zdefiniowaliśmy *formę normalną*, jako zapis zbioru klas wysokości dźwięku we wznoszącym porządku interwałowym i najbardziej skondensowanym pod względem interwałowym. Zdefiniowaliśmy również *wektor interwałowy*, wskazujący ilość wystąpień danego interwału we wskazanym zbiorze.

## 2 Zadania na ćwiczenia – notacja muzyczna

1. Zapisz za pomocą pojedynczej wartości rytmicznej:

- a) ♩ + ♩ =
- b) ♪ + ♪ + ♪ + ♪ =
- c) ♪ + ♩ + ♪ =
- d) ♩ + ♩ =
- e) ♪ + ♪ + ♪ =
- f) ◦ + ♩ + ♩ =
- g) ♩ - ♪ =
- h) ♩ - ♪ =

2. Na wykładzie poznaliśmy klucze z grupy *G*, *F* oraz *C*. Mimo, że w teorii każdy z kluczy można umieścić na dowolnej linii, tak we współczesnej notacji muzycznej najczęściej używa się klucza *G* umieszczonego na drugiej linii (taki klucz nazywamy kluczem wiolinowym), klucza *F* umieszczonego na czwartej linii (nazywamy go basowym), oraz klucza *C* na trzeciej linii (to klucz altowy). Zapisz poniższe dźwięki w kluczach wiolinowym, altowym i basowym (w dowolnym rejestrze):

- a) *c*,
- b) *f*,
- c) *fis*,
- d) *ais*,
- e) *ges*,
- f) *as*,
- g) *b*.

3. Podpisz poszczególne dźwięki w poniższym przykładzie:



4. W poniższych przykładach dopisz dźwięk:

- a) o 7 półtonów wyższy,
- b) o cztery półtony wyższy,
- c) o 10 półtonów wyższy,
- d) o 9 półtonów wyższy.



5. (\*) Zapisz dźwięki z zadania 4. w kluczu basowym (patrz zadanie 2.), a następnie zbuduj dźwięki wg wskazań z podpunktów a), b), c) oraz d) „w przeciwnym kierunku” (tj. w podpunkcie a) dopisz dźwięk o 7 półtonów niższy itd.).

Zauważ, że w ten sposób wykonujemy znaną z wykładu 3. operację inwersji, tj. budujemy ten sam interwał w przeciwnym kierunku niż był on zapisany oryginalnie.

6. Przez długi okres czasu, za kluczowe w kontekście harmonii uznawano trójdźwięki, czyli akordy składające się z trzech dźwięków w odległości tercji (tzn. każdy kolejny dźwięk akordu, jest o położony o tercję wyżej niż poprzedni). Jako, że podstawowo wyróżniamy dwie tercje – małą (jest to odległość 3 półtonów) i wielką (4 półtony) możemy wyróżnić cztery typy trójdźwięków:

- dur – środkowy dźwięk jest tercję wielką wyżej nad najniższym, a najwyższy tercję małą wyżej nad środkowym,
- moll – środkowy dźwięk jest tercję małą wyżej nad najniższym, a najwyższy tercję wielką wyżej nad środkowym,
- zmniejszony – środkowy dźwięk jest tercję małą wyżej nad najniższym, a najwyższy również tercję małą wyżej nad środkowym,
- zwiększony – środkowy dźwięk jest tercję wielką wyżej nad najniższym, a najwyższy również tercję wielką wyżej nad środkowym.

Zbuduj trójdźwięki durowe, mollowe, zmniejszone i zwiększone od poniższych dźwięków:

a)



b)



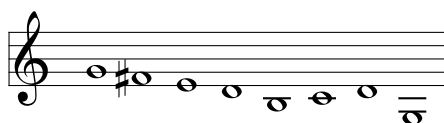
c)



d)



7. Poza poznaną na wykładzie techniką inwersji (polegającą na odwracaniu kierunku interwałów), w dziedzinie kontrapunktu istotne jest również poddanie tematu technice *raka*. Polega ona na zapisaniu tematu muzycznego „od końca”. Technikę raka i inwersji można łączyć, tzn. zapisać temat od końca, z odwróconymi interwałami. Rozpatrzmy poniższy fragment muzyczny:



Zapisz go:

- w raku,
- w inwersji,
- w inwersji w raku,
- przetransponowanego o 7 półtonów w górę,
- przetransponowanego o 3 półtony w dół,
- w inwersji z transpozycją o 2 półtony w górę.

### 3 Zadania na ćwiczenia – klasy wysokości dźwięku

8. W zadaniach 4. i 6. zapisz uzyskane interwały i trójdźwięki jako zbiory klas wysokości dźwięku. Zapisz również ich wektory interwałowe.

9. Jakim zbiorom klas wysokości dźwięku odpowiadają zaznaczone na zielono fragmenty poniższego utworu?

Sehr langsam (♩)

1. 2. 3.

4. 5. 6.

7. 8. 9.

pp

pppp

p

pp

ppp

ppp

pppp

mit sehr zartem Ausdruck

genau im Takt

wie ein Hauch

pppp

10. Wyznacz następujące translacje i inwersje:

- $T_2$  ( $\{3, 6, 7\}$ )
- $T_7$  ( $\{2, 4, 8, 9\}$ )
- $T_0I$  ( $\{7, 10, 11\}$ )
- $T_4I$  ( $\{0, 2, 4\}$ )

11. Ze zbioru  $\{1, 5, T\}$  uzyskano w wyniku translacji zbiór  $\{2, 5, 9\}$ . Dla jakiego  $n$  wykonano translację?

12. Ze zbioru  $\{2, 4, 7\}$  otrzymano w wyniku inwersji zbiór  $\{3, 6, 8\}$ . Dla jakiego  $n$  wykonano inwersję?

13. Ze zbioru  $\{3, 7, E\}$  otrzymano w wyniku inwersji zbiór  $\{0, 4, 8\}$ . Dla jakiego  $n$  wykonano inwersję?

14. Wyznacz formę normalną zbiorów:

- a)  $\{2, 3, 7, E\}$
- b)  $\{3, 8, 9, 2\}$
- c)  $\{0, 1, 4, 6, E\}$ .

15. Zapisz zbiór klas wysokości dźwięku z fragmentu z zadania 7. oraz wyznacz jego formę normalną.

16. Zapisz za pomocą klas wysokości dźwięku zbiorę powstałe w wyniku przekształceń z podpunktów b), d), e) oraz f) z zadania 7.

17. Rozpatrzmy dopełnienie zbioru klas wysokości dźwięku z zadania 15. Jaka jest jego forma normalna?

18. Wyznacz wektor interwałowy zbiorów oraz ich dopełnień:

- a)  $\{0, 5, 7\}$ ,
- b)  $\{1, 4, 7, 8\}$ ,
- c)  $\{0, 2, 3, 7, T\}$ ,
- d)  $\{1, 2, 4, 5, 7, E\}$ ,
- e)  $\{1, 3, 4, 6, 7, 8, T, E\}$ .

## 4 Praca domowa

### 4.1 Zadania za 1 punkt

19. Zapisz w kluczach wiolinowym, basowym i altowym dźwięki:  $e$ ,  $h$ ,  $gis$  oraz  $des$ .

20. Podpisz dźwięki w poniższym przykładzie:



### 4.2 Zadania za 2 punkty

21. Zapisz w kluczu wiolinowym trójdźwięki durowe, mollowe, zmniejszone i zwiększone od dźwięków  $e$  oraz  $g$ .

22. Zapisz w kluczu wiolinowym:

- a) dźwięk odległy o 4 półtony w górę od  $e$ ,
- b) dźwięk odległy o 7 półtonów w górę od  $f$ ,
- c) dźwięk odległy o 3 półtony w dół od  $as$ .

### 4.3 Zadania za 3 punkty

23. Przetransponuj poniższy przykład o 3 półtony w górę.



24. Zapisz przykład z zadania 23. w inwersji (uwaga – pomoc może użycie klucza basowego).