Po co muzykowi grupy?

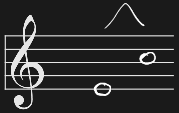
Matematyka dla ciekawych świata XV

Daniel Laskowski

Instytut Muzykologii UW

18.03.2024

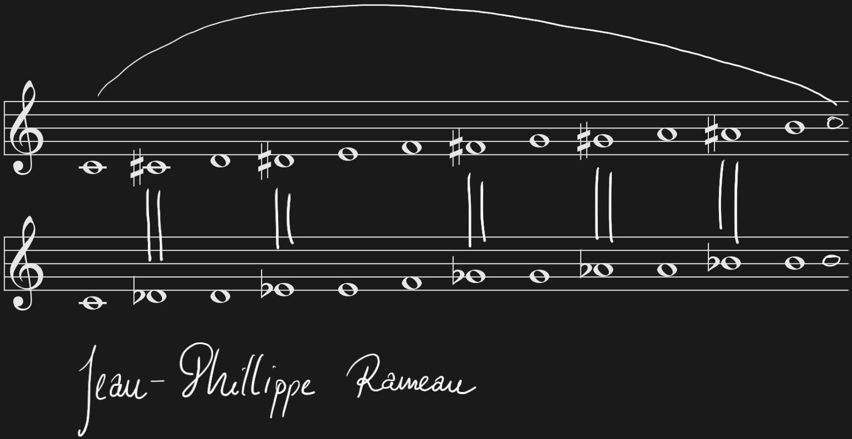
8 półtonów



e c

				przewrót
0	pryma	1	P1	
1		2 >	m2	
2		2	M2	
3		3 >	m3	
4		3	M3	6 >
		4	P4	
		4 < /5 >	A4/d5	
		5	P5	
		6 >	m6	
		6	M6	
		7	m7	
		7 <	M7	
		8	P8	

Powrót do teorii



Aksjomatyka teorii

Równoważność oktawowa

Dźwięki odległe o jedną oktawę lub więcej równych oktaw są w relacji równoważności.

Aksjomatyka teorii

Równoważność oktawowa

Dźwięki odległe o jedną oktawę lub więcej równych oktaw są w relacji równoważności.

Równoważnośc enharmoniczna

Dźwięki zależne enharmonicznie są równoważne.

Aksjomatyka teorii

Równoważność oktawowa

Dźwięki odległe o jedną oktawę lub więcej równych oktaw są w relacji równoważności.

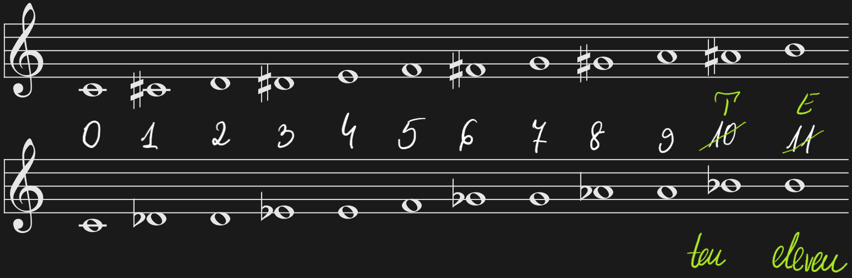
Równoważnosc enharmoniczna

Dźwięki zależne enharmonicznie są równoważne.

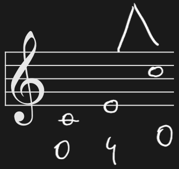
Wniosek

Równoważność oktawowa implikuje równoważność interwałową.

Klasyczna teoria w nowym języku



Klasyczna teoria w nowym języku



$\boxed{\mathbb{Z}_{12}}$

$4-0=4$

$0-4=-4=8$

d_1 - dźwięk 1.

d_2 - dźwięk 2.

$d_1 - d_2$ $\quad$ $d_2 - d_1$

mniejsza to interwał

		interwał
1	P1	0
2 >	m2	1
2	M2	2
3 >	m3	3
3	M3	4
4	P4	5
4 < /5 >	A4/d5	6
5	P5	5
6 >	m6	4
6	M6	3
7	m7	2
7 <	M7	1
8	P8	0

Zbiory klas wysokości dźwięku

Definicja

Zbiorem klas wysokości dźwięku, nazwiemy zbiór zawierający klasy wysokości dźwięków.

Zbiory klas wysokości dźwięku

Definicja

Zbiorem klas wysokości dźwięku, nazwiemy zbiór zawierający klasy wysokości dźwięków.

Przykład:

Zbiory klas wysokości dźwięku

Definicja

Zbiorem klas wysokości dźwięku, nazwiemy zbiór zawierający klasy wysokości dźwięków.

Przykład:

c, fis, a
0 6 9 $\Rightarrow \{0, 6, 9\}$

Zbiory klas wysokości dźwięku

Definicja

Zbiorem klas wysokości dźwięku, nazwiemy zbiór zawierający klasy wysokości dźwięków.

Przykład:

c, fis, a $\qquad \{0, 6, 9\}$

Zbiory klas wysokości dźwięku

Definicja

Zbiorem klas wysokości dźwięku, nazwiemy zbiór zawierający klasy wysokości dźwięków.

Przykład:

c, fis, a $\qquad \{0, 6, 9\}$

$0, 4$ $\qquad 0-4 = 4_8$ $\quad 4-0=4$ $\quad \Rightarrow 4$

Definicja

Dopełnieniem zbioru A nazywamy zbiór takich klas wysokości dźwięków, które do zbioru A nie należą. Takie dopełnienie oznaczamy $\overline{A}$.

Przykład:

$$\overline{\{0,6,9\}} = \{1,2,3,4,5,7,8,T,E\}$$

Zbiory klas wysokości dźwięku

Definicja

Zbiorem klas wysokości dźwięku, nazwiemy zbiór zawierający klasy wysokości dźwięków.

Przykład:

c, fis, a $\qquad \{0, 6, 9\}$

Definicja

Dopełnieniem zbioru A nazywamy zbiór takich klas wysokości dźwięków, które do zbioru A nie należą. Takie dopełnienie oznaczamy $\overline{A}$.

Przykład:

$$\overline{\{0, 6, 9\}}$$

Zbiory klas wysokości dźwięku

Definicja

Zbiorem klas wysokości dźwięku, nazwiemy zbiór zawierający klasy wysokości dźwięków.

Przykład:

$$\text{c, fis, a} \qquad \{0, 6, 9\}$$

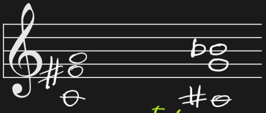
Definicja

Dopełnieniem zbioru A nazywamy zbiór takich klas wysokości dźwięków, które do zbioru A nie należą. Takie dopełnienie oznaczamy $\overline{A}$.

Przykład:

$$\overline{\{0, 6, 9\}} \qquad \{1, 2, 3, 4, 5, 7, 8, \mathrm{T}, \mathrm{E}\}$$

Transpozycja



$\{0, 6, 9\} \xrightarrow{+1} \{1, 7, T\}$

$T_1(\{0,6,9\}) = \{1,7,T\}$

$T_5(\{0,6,9\}) = \{5, E, 2\}$

Inwersja

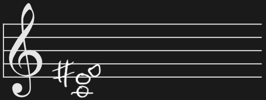
$0,\ 4,\ 6$

$E,\ 1,\ 5$

$5 \qquad 5 \qquad 5$

$0,\ 4,\ 6$

$1 \qquad 3 \qquad 7$



$\{0, \overset{+4}{4}, \overset{+2}{6}\}$ $\qquad$ $\{6, \overset{-2}{8}, \overset{-4}{0}\}$

$\{0, \overset{+4}{4}, \overset{+2}{6}\}$ $\qquad$ $\{E, \overset{-2}{1}, \overset{-4}{5}\}$

$$T_5 I(\{0,4,6\}) = \{E,1,5\}$$

$$T_7 I(\{0,4,6\}) = \{\overset{-2}{1}, \overset{-4}{3}, 7\}$$

Forma normalna

Definicja

Formą normalną nazwiemy zapis zbioru klas wysokości dźwięku we wznoszącym porządku interwałowym i najbardziej skondensowanym pod względem interwałowym.

Przykłady

$$\{3, 5, 6, 9\}$$

Przykłady

$$\{1, 4, 7, 8, \mathrm{T}\}$$

Przykłady

$$\{0, 4, 8\}$$

Zawartość interwałowa

Definicja

Zawartością interwałową nazywamy kolekcję wszystkich interwałów, zawartych w zbiorze klas wysokości A, policzonych z krotnościami.

Zawartość interwałowa

Definicja

Zawartością interwałową nazywamy kolekcję wszystkich interwałów, zawartych w zbiorze klas wysokości A, policzonych z krotnościami.

Przykład:

Definicja

Zawartością interwałową nazywamy kolekcję wszystkich interwałów, zawartych w zbiorze klas wysokości A, policzonych z krotnościami.

Przykład:

$$\{0, 4, 7\}$$

4 5 3

$0-4 = -4 = 8$

$4-0 = 4$

$7-0 = 7$

$0-7 = 5$

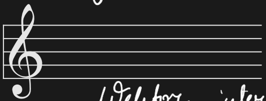
$4-7 = 9$

$7-4 = 3$

jedna 3

jedna 4

jedna 5

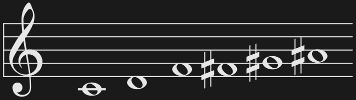


Wektor interwałowy

$$\langle 0, 0, 1, 1, 1, 0 \rangle$$

Jeszcze jeden przykład

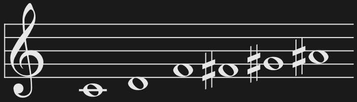
$$\{0, 2, 5, 6, 8, \mathrm{T}\}$$



$$\langle 1, 4, 2, 4, 2, 3 \rangle$$

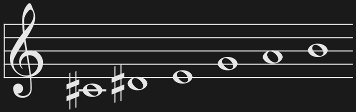
Jeszcze jeden przykład

$\{0, 2, 5, 6, 8, T\}$



$\langle 1, 4, 2, 4, 2, 3 \rangle$

$\{1, 3, 4, 7, 9, E\}$



$\langle 1, 4, 2, 4, 2, 3 \rangle$

Twierdzenie o heksachordzie

Twierdzenie (M. Babbitt)

Niech H będzie heksachordem, a $\overline{H}$ jego dopełnieniem. Wówczas $\mathcal{I}_H = \mathcal{I}_{\overline{H}}$.