

ZAGADKA NA ROZGRZEWKĘ

Statek z Krakowa do Gdańska płynie dwa dni, a z Gdańska do Krakowa trzy dni.
Ile płynie tratwa z Krakowa do Gdańska?

Zakładamy, że statek płynie ze stałą prędkością w obie strony względem rzeki, oraz że tratwa nie ma własnego napędu, tzn. płynie razem z prądem rzeki.



Wykład wkrótce się rozpocznie.

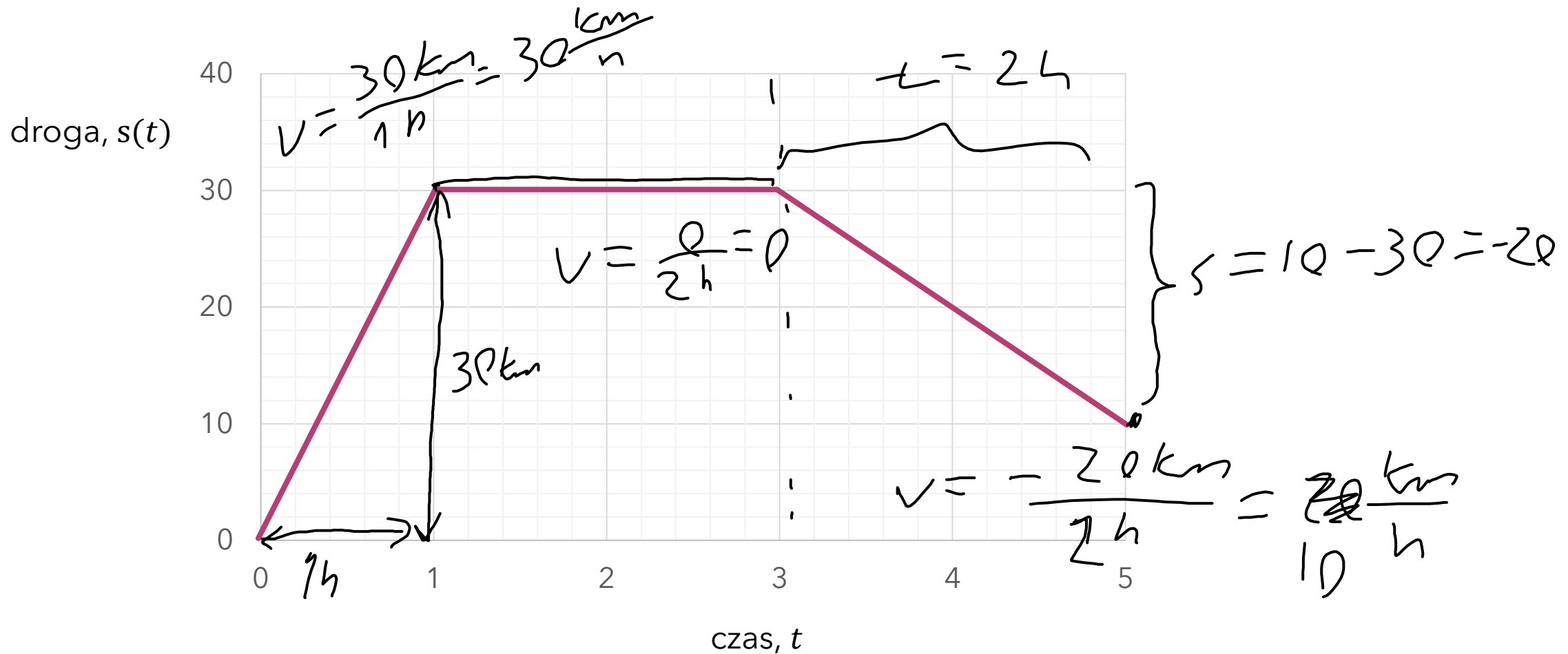
$$a_0 = 1 [a_0]$$

$$\arcsin(z)$$

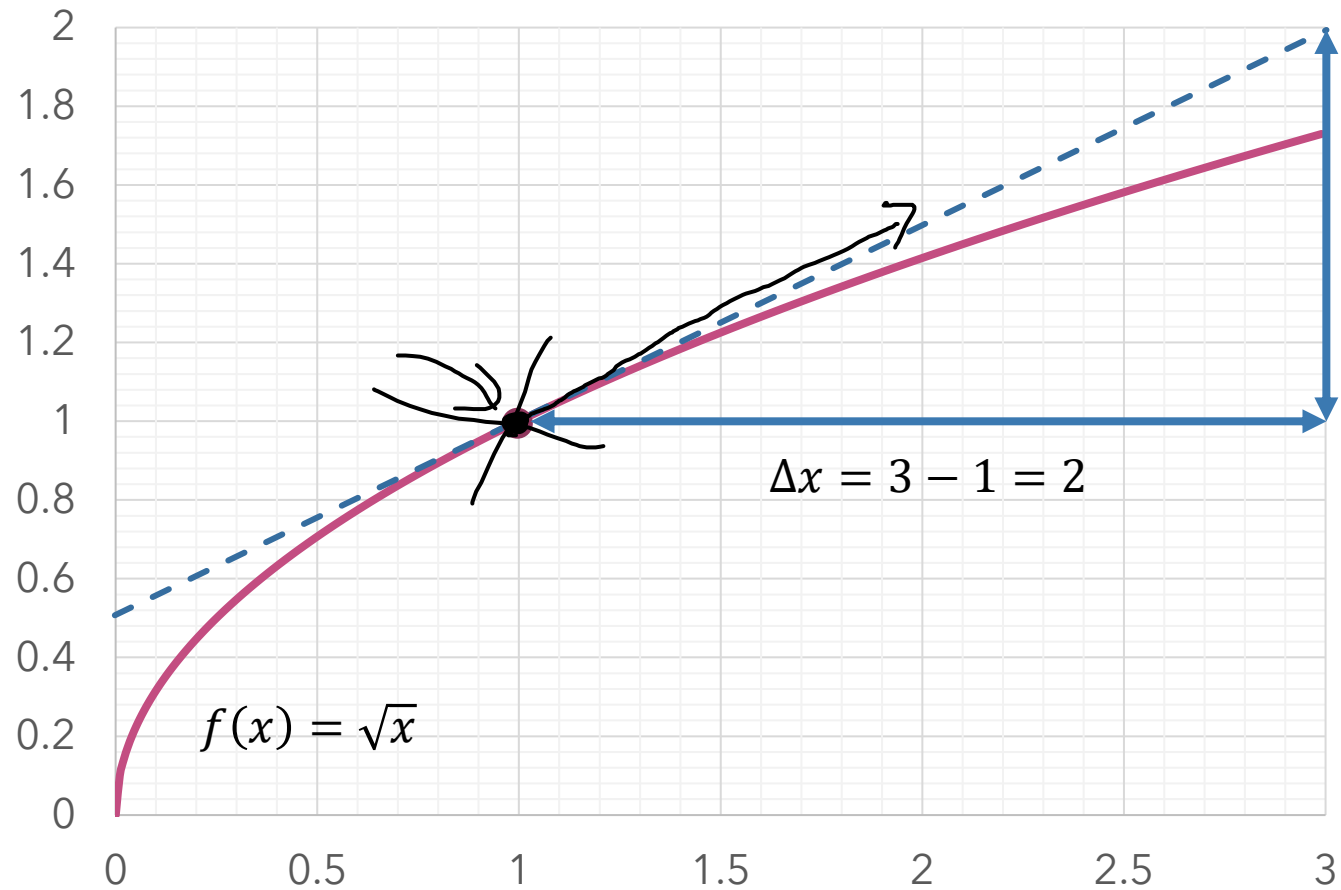
POWTÓRZENIE POCHODNYCH

PIOTR MORAWIECKI

OBLICZANIE PRĘDKOŚCI Z WYKRESU



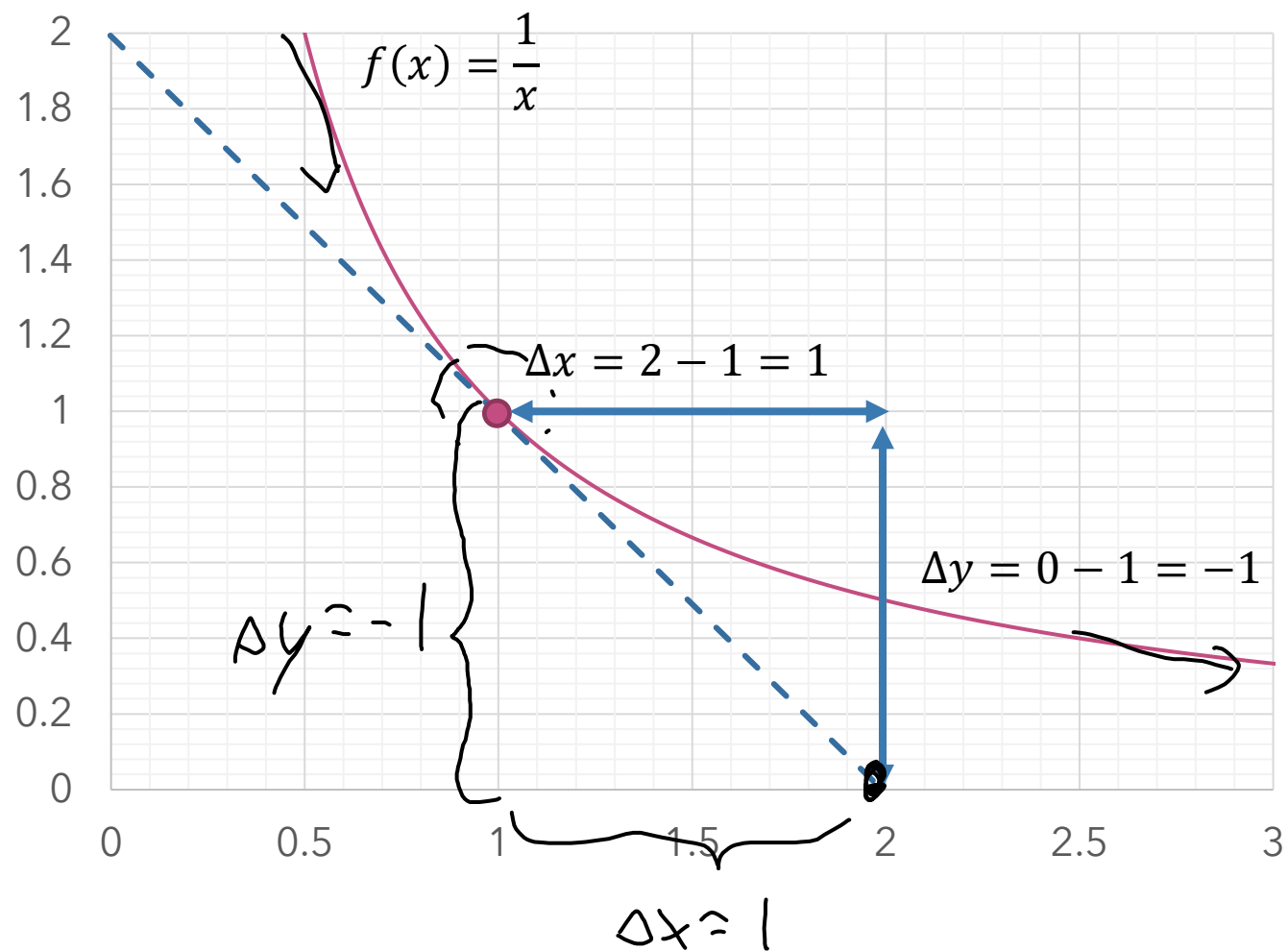
WYZNACZANIE POCHODNEJ GRAFICZNIE



$$\Delta y = 2 - 1 = 1$$

$$\frac{df}{dx} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{2}$$

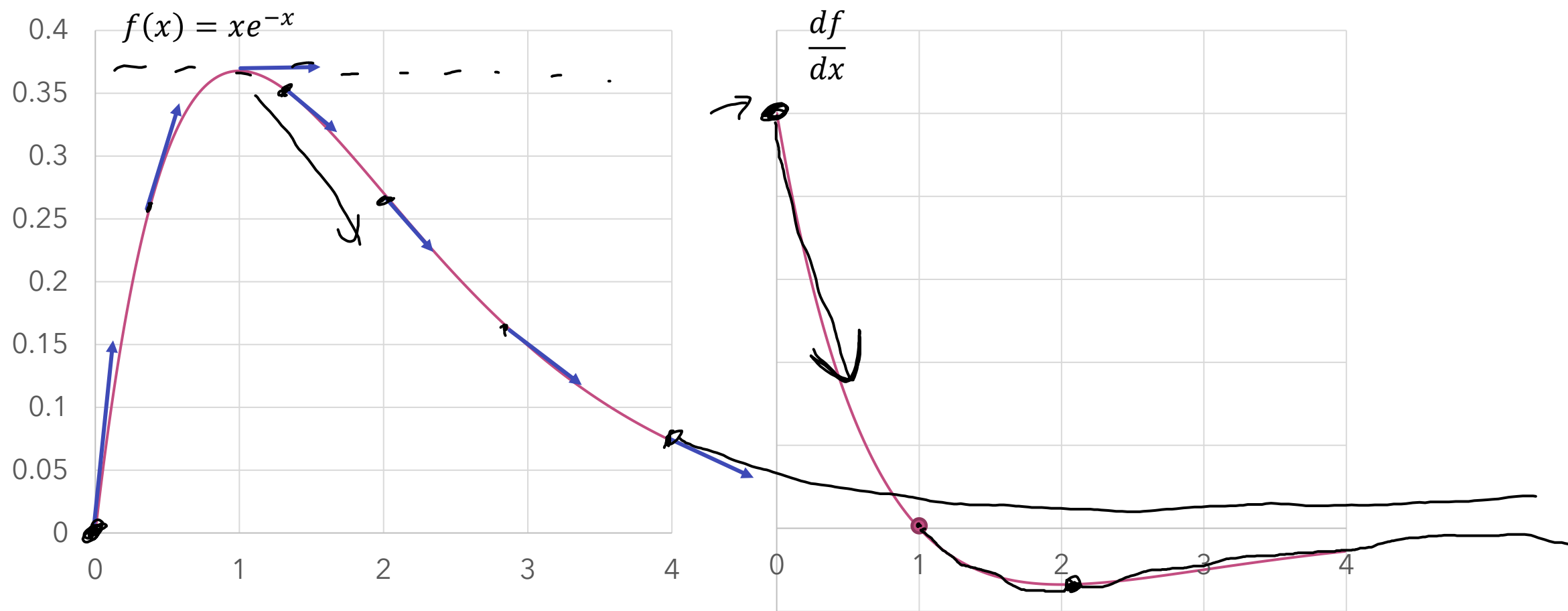
WYZNACZANIE POCHODNEJ GRAFICZNIE



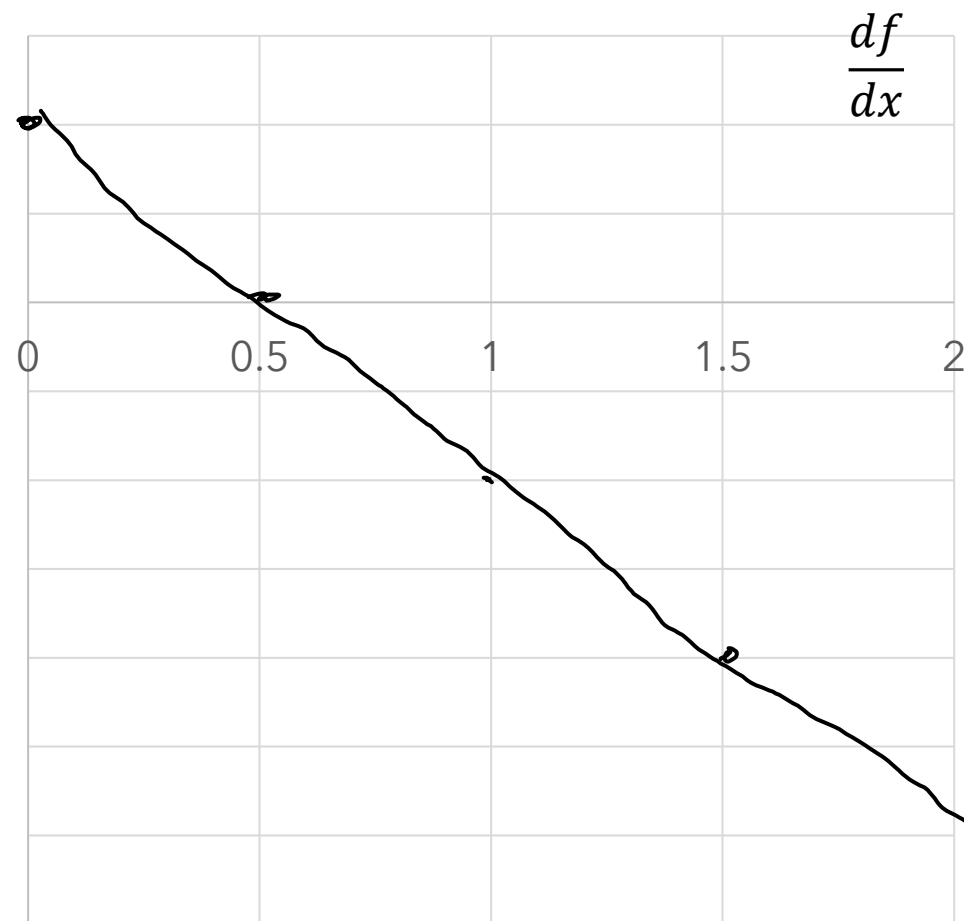
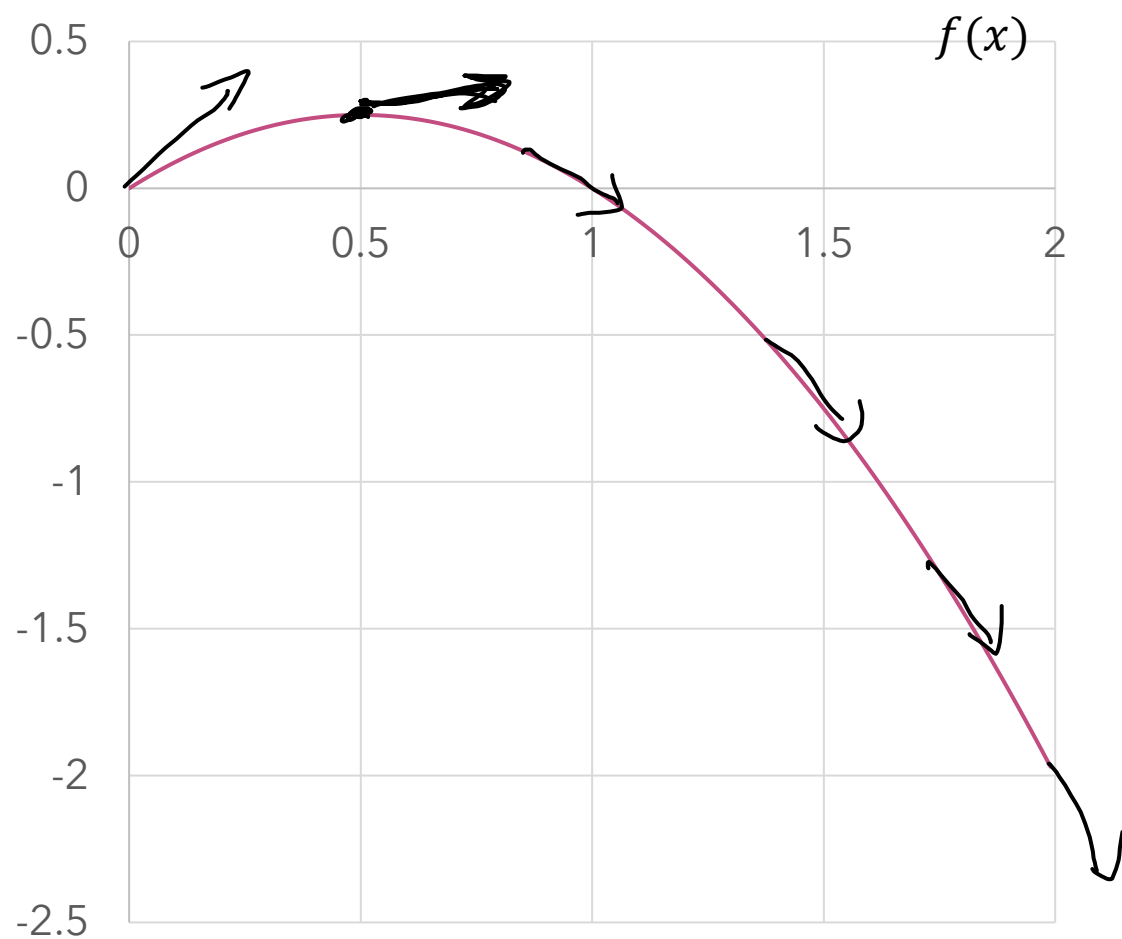
~~Δ~~

$$\frac{df}{dx} \approx \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-1}{1} = -1$$

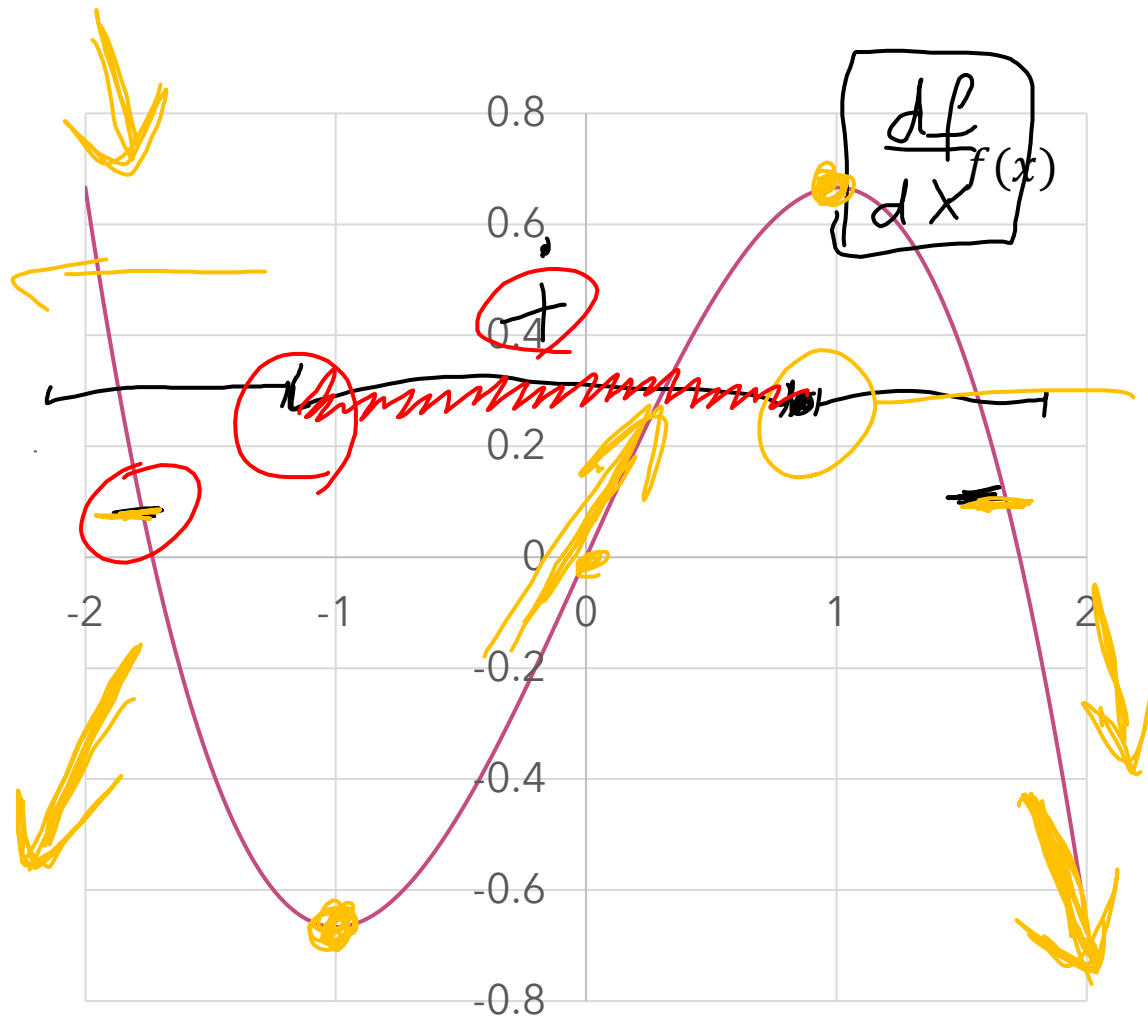
GRAFICZNA INTERPRETACJA POCHODNEJ



GRAFICZNA INTERPRETACJA POCHODNEJ



GRAFICZNA INTERPRETACJA POCHODNEJ



Dla jakich wartości x funkcja $f(x)$ rośnie?

$$[-1, 1]$$

Dla jakiego x funkcja $f(x)$ rośnie najszybciej?

$$x = 0$$

Dla jakiego x funkcja $f(x)$ osiąga lokalne minimum?

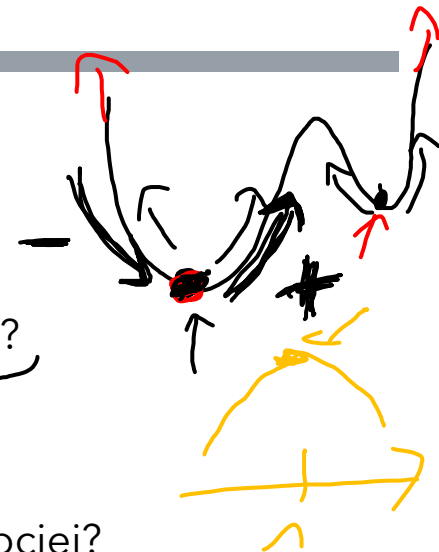
$$x = -1$$

Dla jakiego x funkcja $f(x)$ osiąga lokalne maksimum?

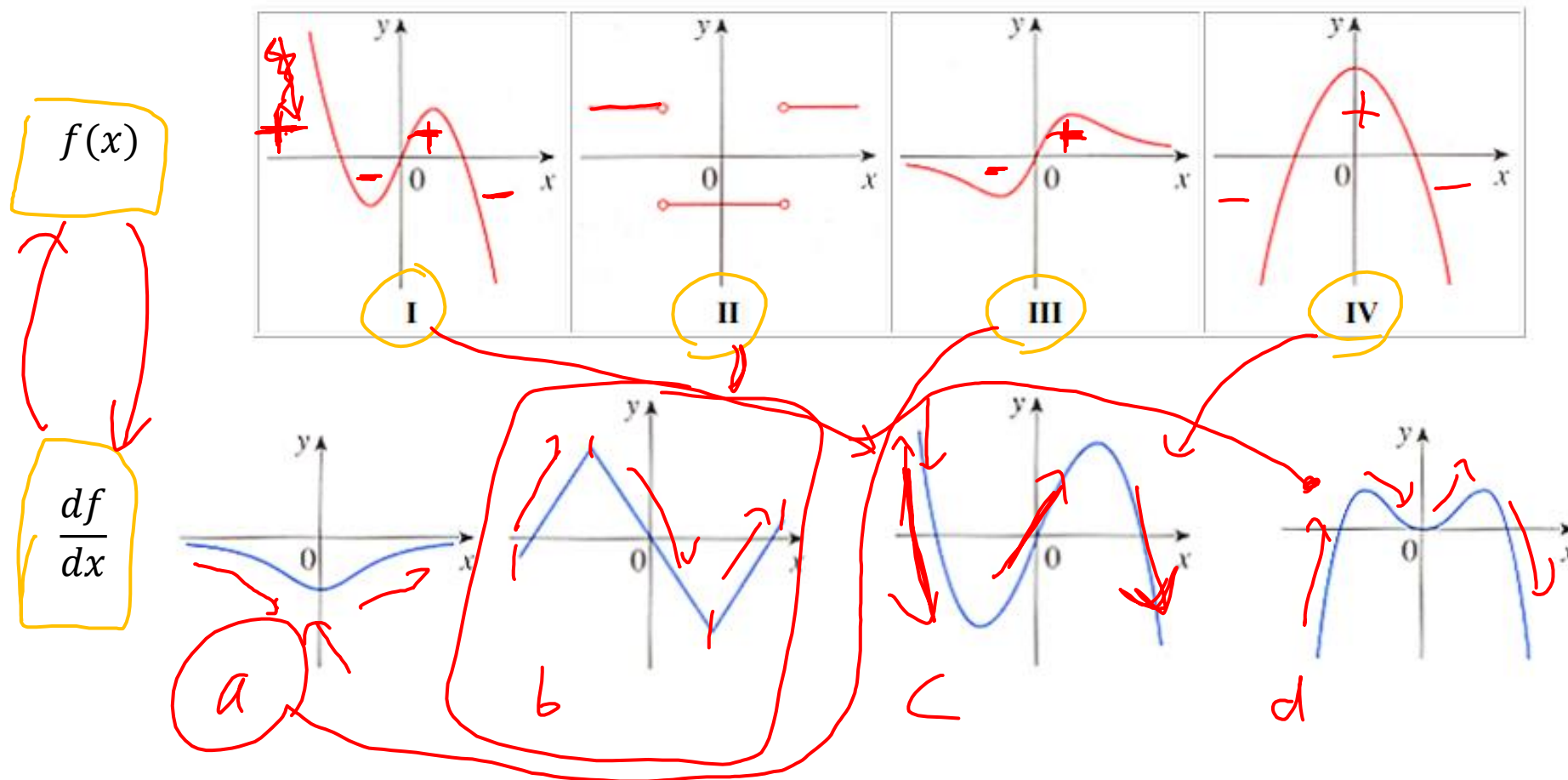
$$x = 1$$

Co się dzieje z funkcją $f(x)$ kiedy x dąży do nieskończoności?

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) \rightarrow -\infty$$



DOPASUJMY WYKRES POCHODNEJ DO FUNKCJI?



POCHODNA FUNKCJI POTĘGOWEJ

$\sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$ Przydatne pochodne

$$(x^n)' = nx^{n-1}$$

Własności pochodnych

$$(af(x))' = af'(x)$$

- $f(x) = x^2$

$n=2$
 $\frac{d}{dx}(x^2) = (x^2)' = 2 \cdot x^1 = 2x$

- $f(x) = \frac{1}{2}x^4$

$(\frac{1}{2}x^4)' = \frac{1}{2}(x^4)' = \frac{1}{2} \cdot 4x^3 = 2x^3$

- $f(x) = \frac{5}{x^3}$

$(\frac{5}{x^3})' = 5(\frac{1}{x^3})' = 5(x^{-3})' = 5(-3)x^{-3-1} = -15x^{-4} = -\frac{15}{x^4}$

- $f(x) = 2\sqrt{x}$

$(2\sqrt{x})' = 2(\sqrt{x})' = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot x^{\frac{1}{2}-1} = x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{x}}$

- $f(x) = 5$

$f'(x) = 0$



POCHODNA SUMY DWÓCH FUNKCJI

Przydatne pochodne

$$(x^n)' = nx^{n-1}$$

Własności pochodnych

1. $(af(x))' = af'(x)$

2. $(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x)$

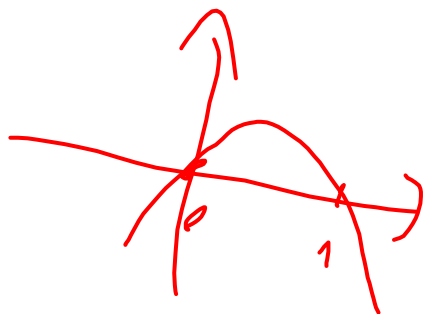
• $f(x) = \underline{x^2} + \underline{x^3}$ $(x^2 + x^3)' = (x^2)' + (x^3)'$
 $\qquad\qquad\qquad = \underline{2x} + 3x^2$

✓ • $f(x) = \frac{1}{2}x^6 - 2x^{10}$

✓ • $f(x) = x^4 - \frac{3}{x}$

✓ • $f(x) = \underline{x(1-x)} = x - x^2$

$f'(x) = \underline{(x)'} - (x^2)' =$
 $\qquad\qquad\qquad = 1 - 2x$



POCHODNA FUNKCJI WYKŁADNICZEJ

Przydatne pochodne

7e

$$(x^n)' = nx^{n-1}$$

$$(e^x)' = e^x$$

Własności pochodnych

1.

$$(af(x))' = af'(x)$$

2.

$$(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x)$$

• $f(x) = e^x \longrightarrow f' = e^x$

• $f(x) = 5e^x \longrightarrow (5e^x)' = 5(e^x)' = 5e^x$

• $f(x) = x^4 - e^x$

$$(x^4)' - (e^x)' = 4x^3 - e^x$$

POCHODNA ILOCZYNU DWÓCH FUNKCJI

Przydatne pochodne

$$(x^n)' = nx^{n-1}$$

$$(e^x)' = e^x$$

Własności pochodnych

1. $(af(x))' = af'(x)$

2. $(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x)$

3. $(f(x)g(x))' = \underline{f'(x)g(x)} + \underline{f(x)g'(x)}$

• $f(x) = xe^x$

• $f(x) = x(1-x)$

• $f(x) = 1 + \frac{e^x}{x}$

$$h(x) = x \cdot e^x = 1 \cdot e^x + x \cdot e^x =$$

$$f(x) = x \quad g(x) = e^x = e^x(1+x)$$

$$f' = 1$$

$$g' = e^x$$

$$\left(\frac{e^x}{x}\right)' = \left(e^x \cdot \frac{1}{x}\right)'$$

POCHODNA FUNKCJI ZŁOŻONEJ

Przydatne pochodne

$(x^n)' = nx^{n-1}$
 $(e^x)' = e^x$

Własności pochodnych

- $(af(x))' = af'(x)$
- $(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x)$
- $(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$
- $(f(g(x)))' = f'(g(x))g'(x)$

• $f(x) = e^{2x}$

• $f(x) = e^{x(1-x)}$

• $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$

• $f(x) = \sqrt{xe^x}$

Handwritten notes and examples:

- $f(x) = e^{g(x)}$ with $g(x) = 2x$
- $f'(x) = f'(g(x))g'(x) = e^{g(x)} \cdot 2 = 2e^{2x}$
- $(e^g)' = e^g$
- $(\sqrt{g(x)})' = \frac{1}{2} (g(x))^{-1/2}$
- $(x e^x)'$

KROPLA WODY



Przydatne pochodne

$$(x^n)' = nx^{n-1}$$

$$(e^x)' = e^x$$

Dystans przebyty przez kroplę wody opisuje funkcja $s(t) = a + be^{-kt}$ 4. pkt

- Znajdź równanie opisujące prędkość $v(t)$ i przyspieszenie $a(t)$
- Określ jak przyspieszenie kropli zależy od jej prędkości.
- Określ fizyczną interpretację parametrów a , b i k .

Własności pochodnych

1. $(af(x))' = af'(x)$

2. $(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x)$

3. $(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$

4. $(f(g(x)))' = f'(g(x))g'(x)$

$$\underline{s(0)} = a + b \underbrace{e^{-k \cdot 0}}_1 = \underline{a + b}$$
$$\underline{v(0)} = \underline{-k \underline{b}}$$

$$a^x = e^{\underline{\quad} x}$$

SPADOCHRONIARZ

Dystans przebyty przez spadochroniarza opisuje funkcja $v(t) = \frac{1}{a+kt}$

- Znajdź równanie opisujące przyspieszenie $a(t)$
- Określ jak przyspieszenie spadochroniarza zależy od jego prędkości.
- Określ jaki jest związek parametru k z prędkością początkową.

Przydatne pochodne

$$(x^n)' = nx^{n-1}$$

$$(e^x)' = e^x$$

Własności pochodnych

1. $(af(x))' = af'(x)$

2. $(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x)$

3. $(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$

4. $(f(g(x)))' = f'(g(x))g'(x)$