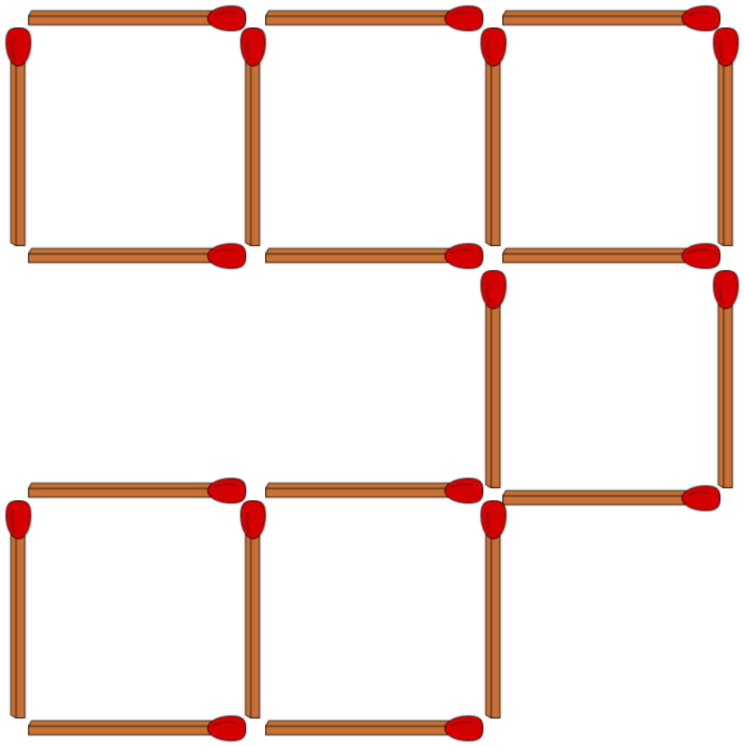
Zagadka na rozgrzewkę

Przesuń trzy zapałki, tak żeby powstało dokładnie pięć kwadratów.

Wszystkie zapałki powinny wchodzić w skład kwadratów, tzn. nie można np. odkładać zapałek „na bok”.



Wykład wkrótce się rozpocznie.

Modelowanie populacji 3

Wilk i Zając, czyli o interakcji drapieżnika i ofiary

Przypomnienie ostatnich wykładów

- Wprowadziliśmy dwa modele wzrostu populacji królików, model wzrostu wykładniczego oraz model logistyczny.
- Równania różniczkowe można rozwiązywać analitycznie lub numerycznie.
- Nawet nie znając rozwiązania równania różniczkowego może zbadać jego własności np. obecność punktów stacjonarnych.

Jakie czynniki wybrać?

1. Obecna liczba królików

2. Ilość dostępnego pożywienia

3. Obecność drapieżników

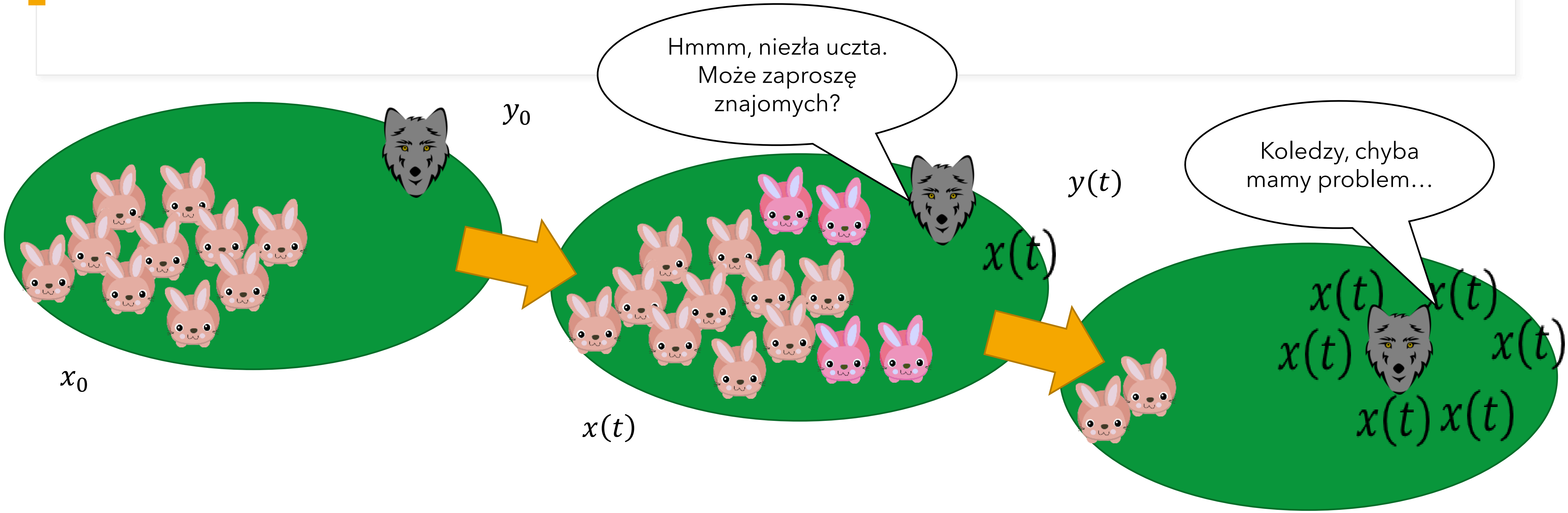
Jakie czynniki wybrać?

1. Obecna liczba królików

2. Ilość dostępnego pożywienia

3. Obecność drapieżników

Model 3. Obecność drapieżników



Model 3. Obecność drapieżników

- Sformułujmy model w postaci dwóch równań różniczkowych:

$$\frac{dx}{dt} =$$

$$\frac{dy}{dt} =$$

Szybkość rozmnażania się królików

Szybkość z jaką króliki są łapane przez wilki

Szybkość wzrostu populacji wilków.

Szybkość umierania / emigracji wilków

- Zakładamy, że $a, b, c, d > 0$.

Stany stacjonarne

$$\frac{dx}{dt} = ax - bxy$$

$$\frac{dy}{dt} = cxy - dy$$

- W stanie stacjonarnym liczba królików i wilków się nie zmienia, tzn.:

$$\frac{dx}{dt} = ax - bxy = 0 \qquad \frac{dy}{dt} = cxy - dy = 0$$

$$x(a - by) = 0 \qquad y(cx - d) = 0$$

Przypadek 1.

$$x = 0 \qquad y = 0$$

Przypadek 2.

$$a - by = 0 \qquad cx - d = 0$$

$$y = \frac{a}{b} \qquad x = \frac{d}{c}$$

Stany stacjonarne

$$\frac{dx}{dt} = ax - bxy$$

$$\frac{dy}{dt} = cxy - dy$$

$$x = 0 \qquad\qquad x = \frac{d}{c} = \frac{\text{szybkość z jaką wilki emigrują}}{\text{szybkość z jaką wilki przybywają}}$$

$$y = 0 \qquad\qquad y = \frac{a}{b} = \frac{\text{szybkość z jaką króliki się rozmnażają}}{\text{szybkość z jaką króliki są łapane}}$$

- Czy zawsze będziemy dążyć do jednego z tych stanów stacjonarnych?

Raczej nie, np. dla $y_0 = 0$ populacja królików będzie rosnąć wykładniczo.

- A co się stanie jeśli $y_0 > 0$?

Pytanie za „milion"

$$\frac{dx}{dt} = ax - bxy$$

$$\frac{dy}{dt} = cxy - dy$$

- A co się stanie jeśli $y_0 > 0$?

A. System będzie dążyć do stanu stacjonarnego $x = \frac{d}{c}, y = \frac{a}{b}$

B. System będzie dążyć do stanu stacjonarnego $x = 0, y = 0$

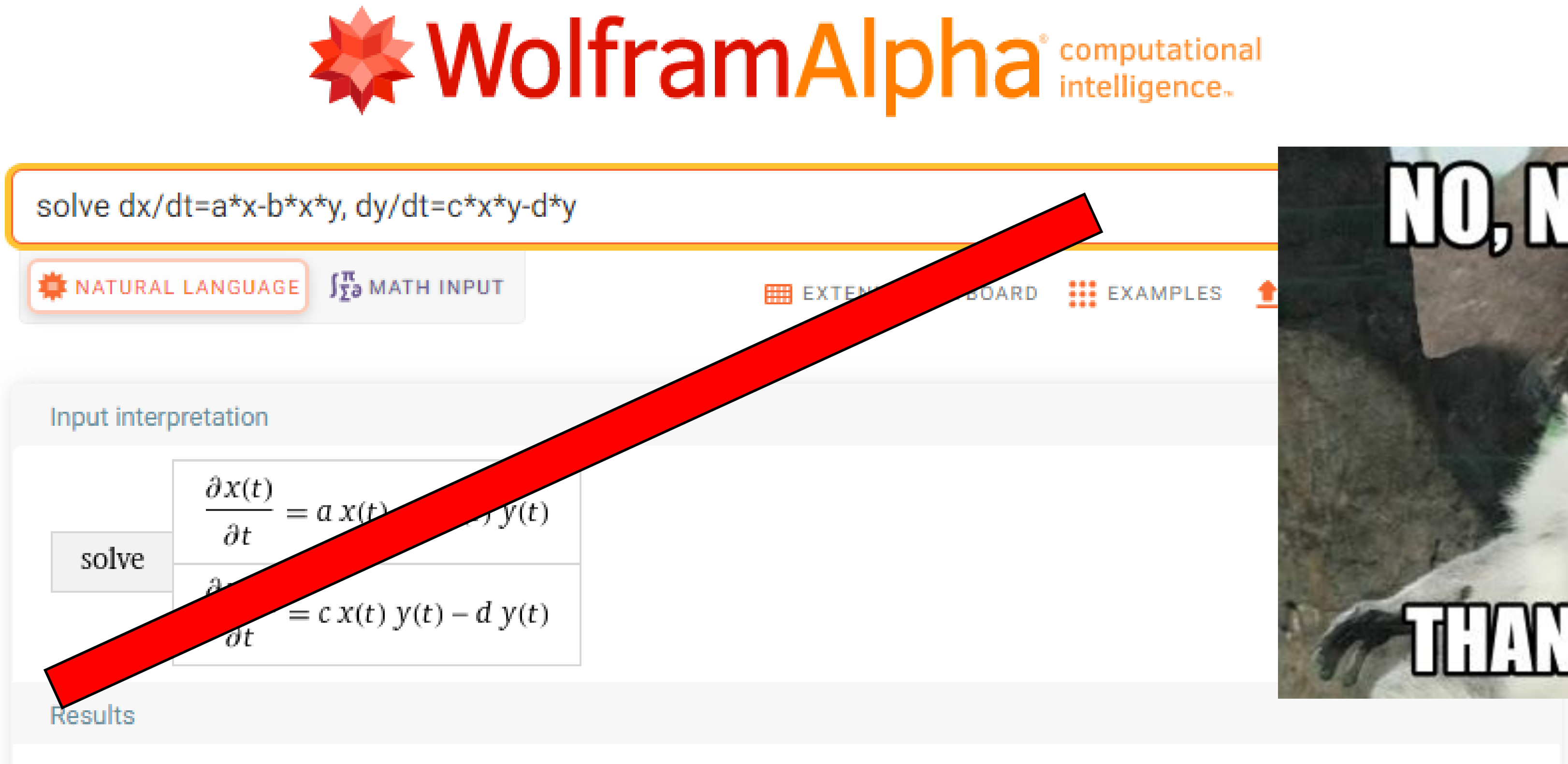
C. Wszystkie wilki w końcu odejdą, a populacja królików zacznie rosnąć wykładniczo.

D. Żadna z powyższych odpowiedzi

Rozwiązanie w WolframAlfa

$$\frac{dx}{dt} = ax - bxy$$

$$\frac{dy}{dt} = cxy - dy$$

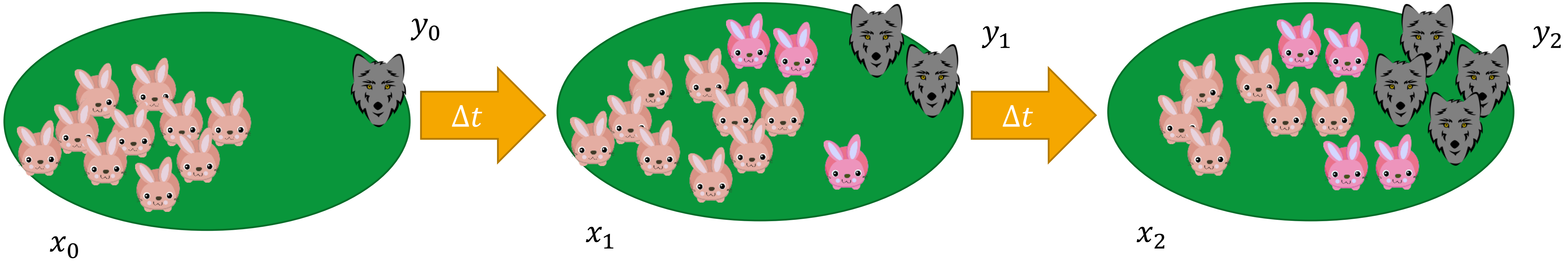


Symulacja numeryczna

$$\frac{dx}{dt} = ax - bxy$$

$$\frac{dy}{dt} = cxy - dy$$

- Skoro nie umiemy znaleźć rozwiązania analitycznego, to posłużymy się symulacją numeryczną.



Symulacja numeryczna

$$\frac{dx}{dt} = ax - bxy$$

$$\frac{dy}{dt} = cxy - dy$$

- W każdym kroku czasowym obliczamy populację królików x_i i wilków y_i w następujący sposób:

$$x_i = x_{i-1} + (ax_{i-1} - bx_{i-1}y_{i-1}) \cdot \Delta t$$

$$y_i = y_{i-1} + (cx_{i-1}y_{i-1} - dy_{i-1}) \cdot \Delta t$$

$x_0 = 200$
$y_0 = 10$
$a = 1$
$b = 0.1$
$c = 0.01$
$d = 1$
$\Delta t = 0.01$

Punkt stacjonarny

$$x = \frac{d}{c} = 100$$

$$y = \frac{a}{b} = 10$$

- Jak system ten będzie ewoluować?

Symulacja numeryczna

- Liczba wilków i królików po pierwszym kroku czasowym:

$$x_1 = x_0 + (ax_0 - bx_0y_0) \cdot \Delta t$$

$$y_1 = y_0 + (cx_0y_0 - dy_0) \cdot \Delta t$$

$$x_1 = 200 + (1 \cdot 200 - 0.1 \cdot 200 \cdot 5) \cdot 0.01 = 201$$

$$y_1 = 10 + (0.01 \cdot 200 \cdot 10 - 1 \cdot 10) \cdot 0.01 = 10.1$$

$$\begin{array}{c} x_0 = 200 \\ y_0 = 10 \\ a = 1 \\ b = 0.1 \\ c = 0.01 \\ d = 1 \\ \Delta t = 0.01 \end{array}$$

Skrypt w Pythonie

$$x_i = x_{i-1} + (ax_{i-1} - bx_{i-1}y_{i-1}) \cdot \Delta t$$

$$y_i = y_{i-1} + (cx_{i-1}y_{i-1} - dy_{i-1}) \cdot \Delta t$$

$$x_0 = 200$$
$$y_0 = 10$$
$$a = 1$$
$$b = 0.1$$
$$c = 0.01$$
$$d = 1$$
$$\Delta t = 0.01$$

Parametry symulacji

```
x0 = 200
y0 = 10
a = 1
b = 0.1
c = 0.01
d = 1
t_max = 50
dt = 0.01
```

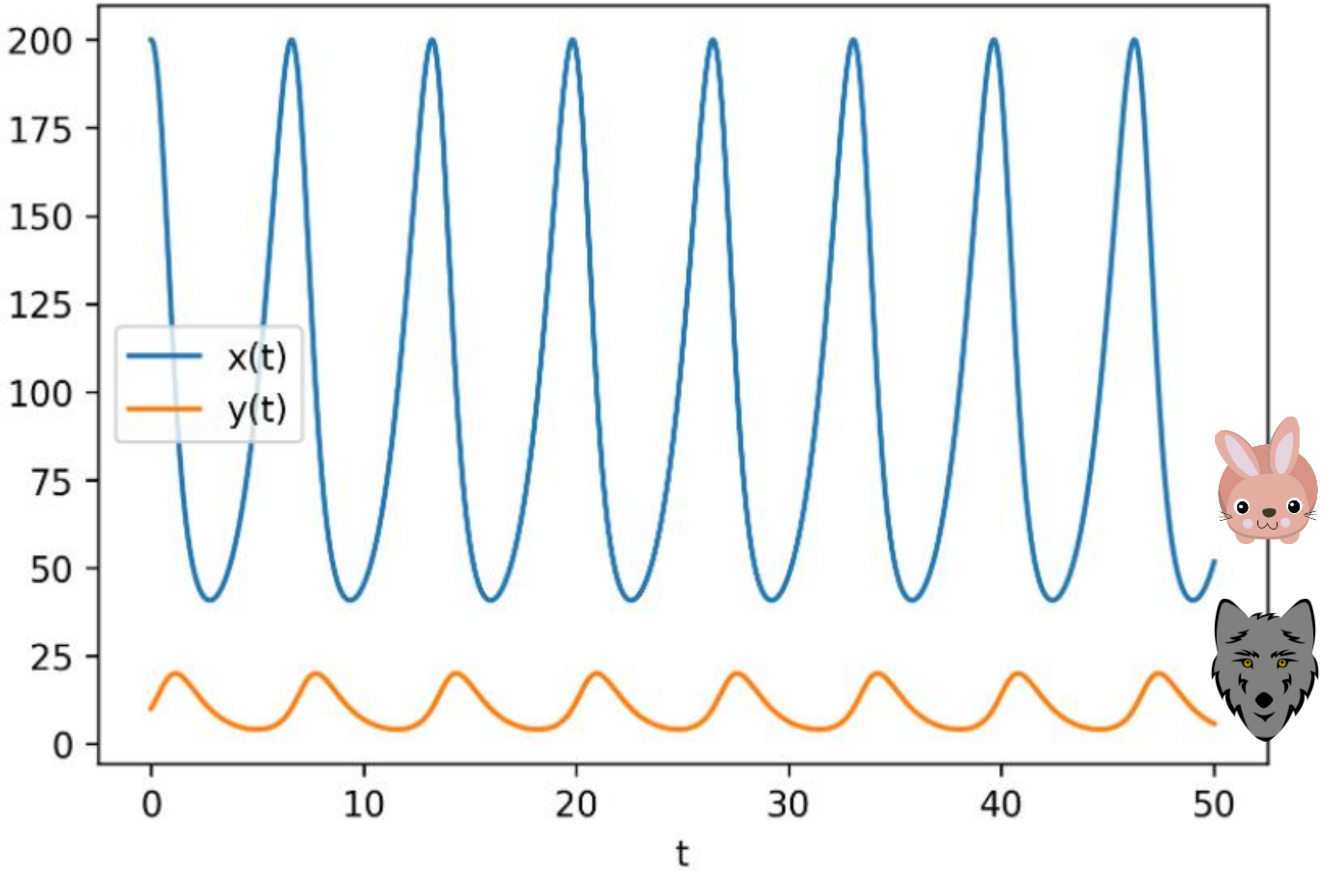
Utworzenie list do zapisywania wartości t_i, x_i i y_i

```
t = [0]
x = [x0]
y = [y0]
```

Iteracyjne obliczanie wartości t_i, x_i i y_i

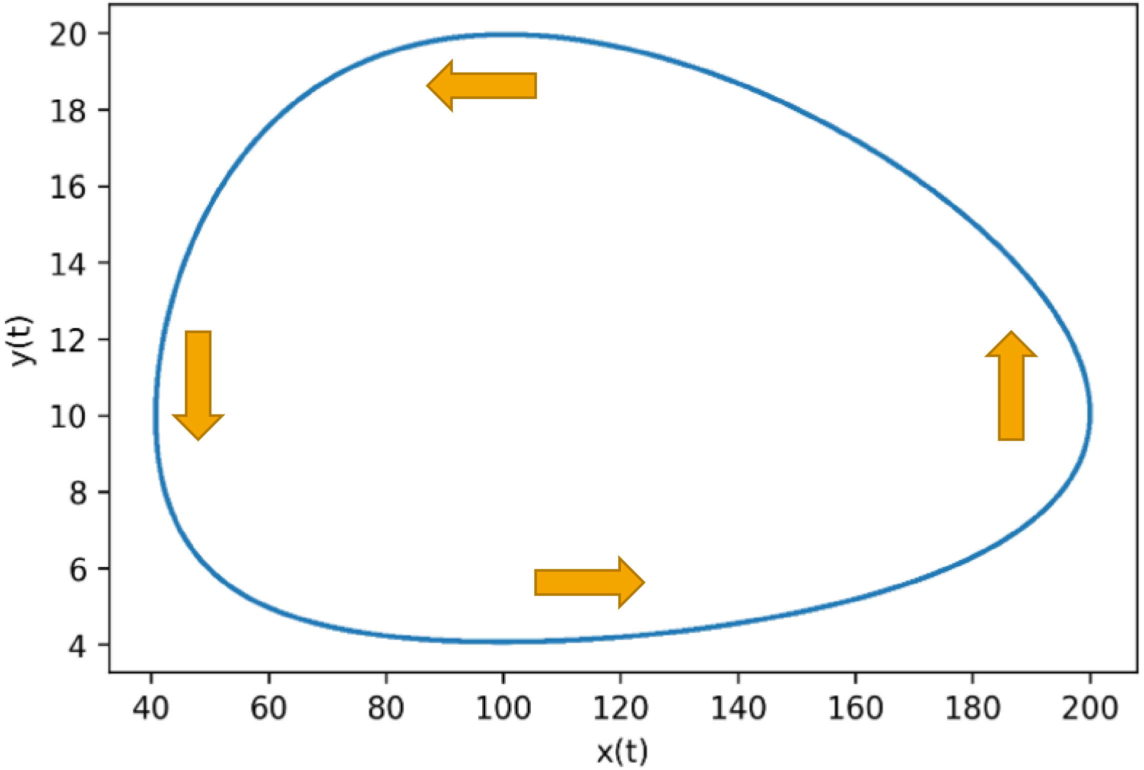
```
while t[-1] < t_max:
  t.append(t[-1] + dt)
  x.append(x[-1] + (a*x[-1]-b*x[-1]*y[-1]) * dt)
  y.append(y[-1] + (c*x[-1]*y[-1]-d*y[-1]) * dt)
```

Wynik symulacji



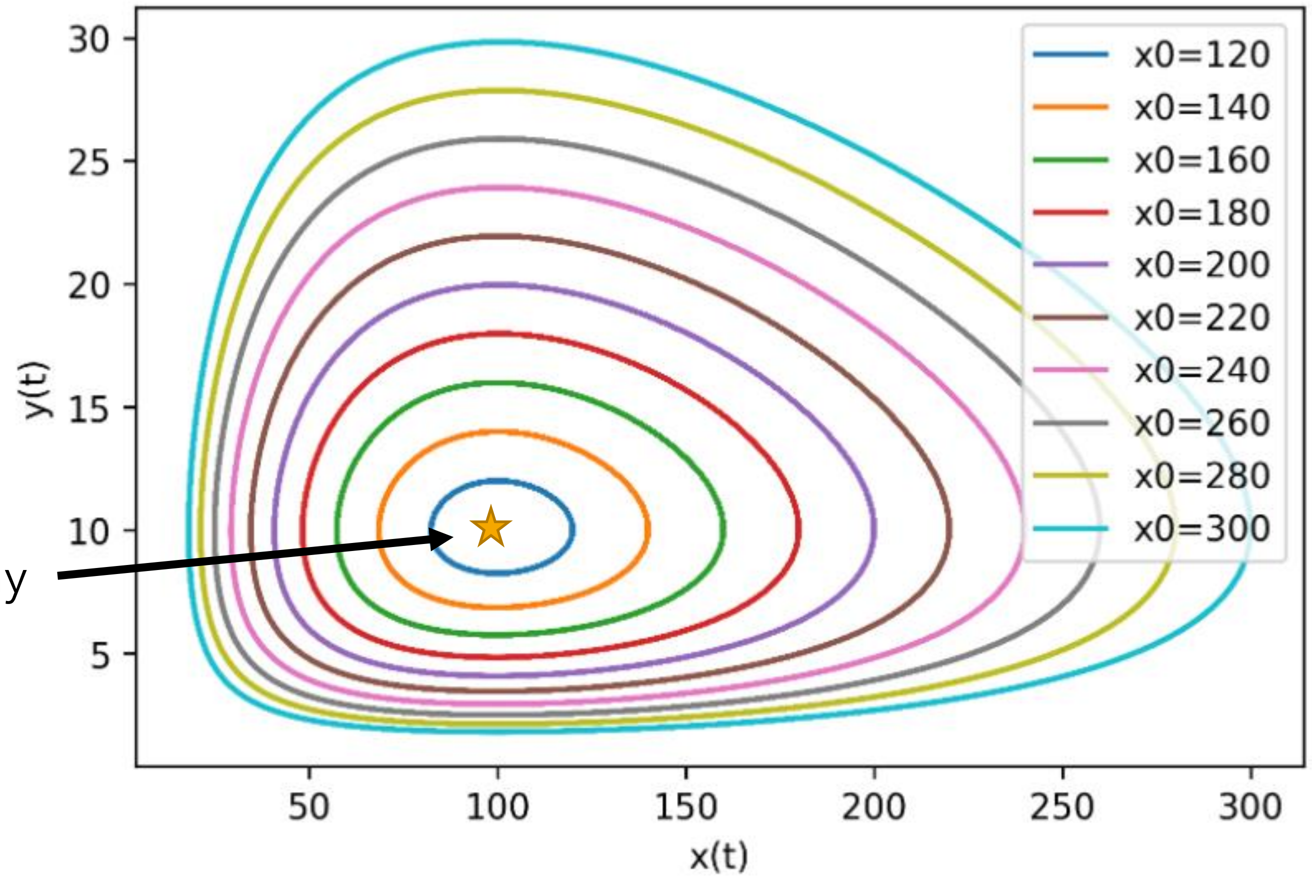

```python
import matplotlib.pyplot as plt

plt.plot(t,x)
plt.plot(t,y)
plt.xlabel('t')
plt.legend(['x(t)', 'y(t)'])
plt.show()
```

Wykres fazowy (1)



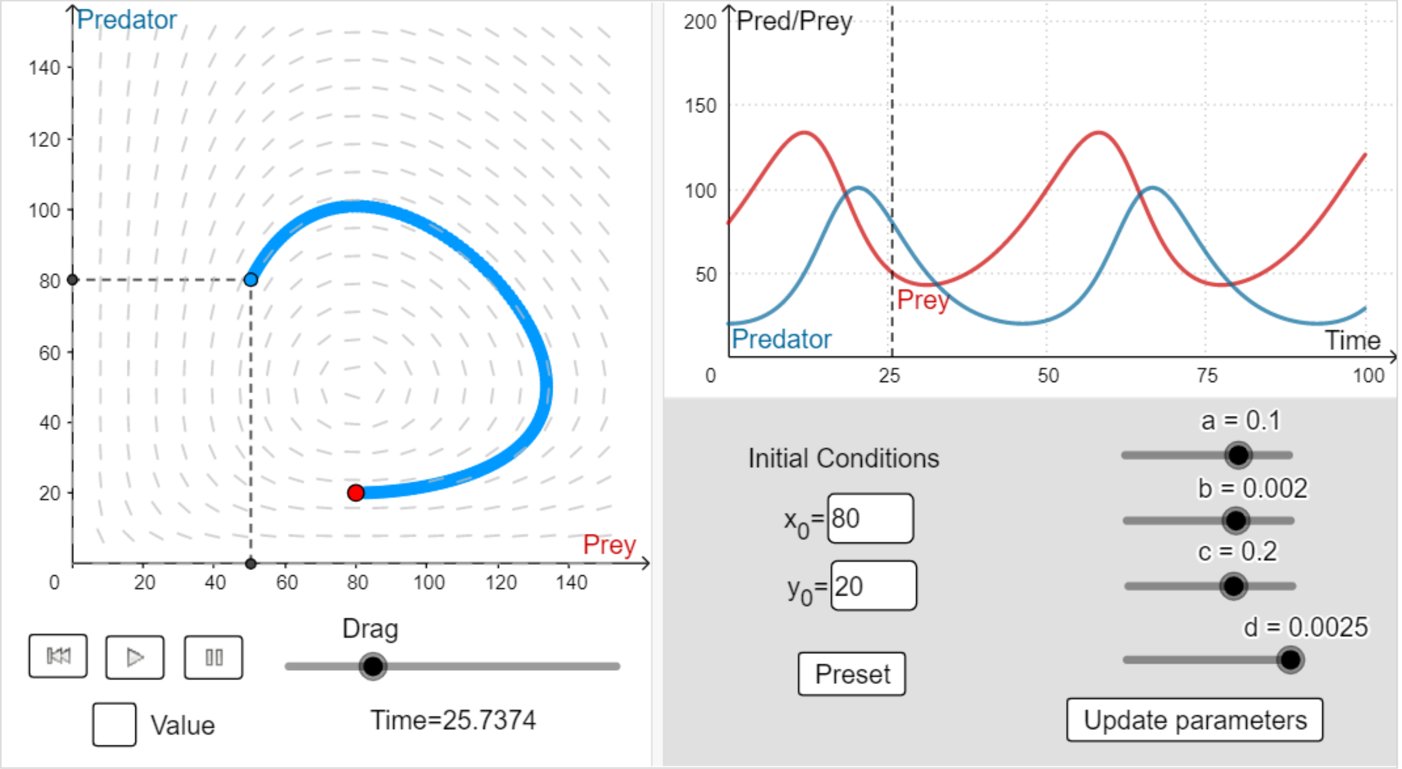
```
plt.plot(x,y)
plt.xlabel('x(t)')
plt.ylabel('y(t)')
plt.show()
```

Wykres fazowy (2)



Punkt stacjonarny

Symulator online



https://teaching.smp.uq.edu.au/scims/Appl_analysis/Lotka_Volterra.html

Pytanie za „milion”

$$\frac{dx}{dt} = \alpha x - \beta xy$$

$$\frac{dy}{dt} = \delta xy - \gamma y$$

- A co się stanie jeśli $y_0 > 0$?

A. System będzie dążyć do stanu stacjonarnego $x = \frac{\gamma}{\delta}, y = \frac{\alpha}{\beta}$

B. System będzie dążyć do stanu stacjonarnego $x = 0, y = 0$

C. Wszystkie wilki w końcu odejdą, a populacja królików zacznie rosnąć wykładniczo.

D. Żadna z powyższych odpowiedzi

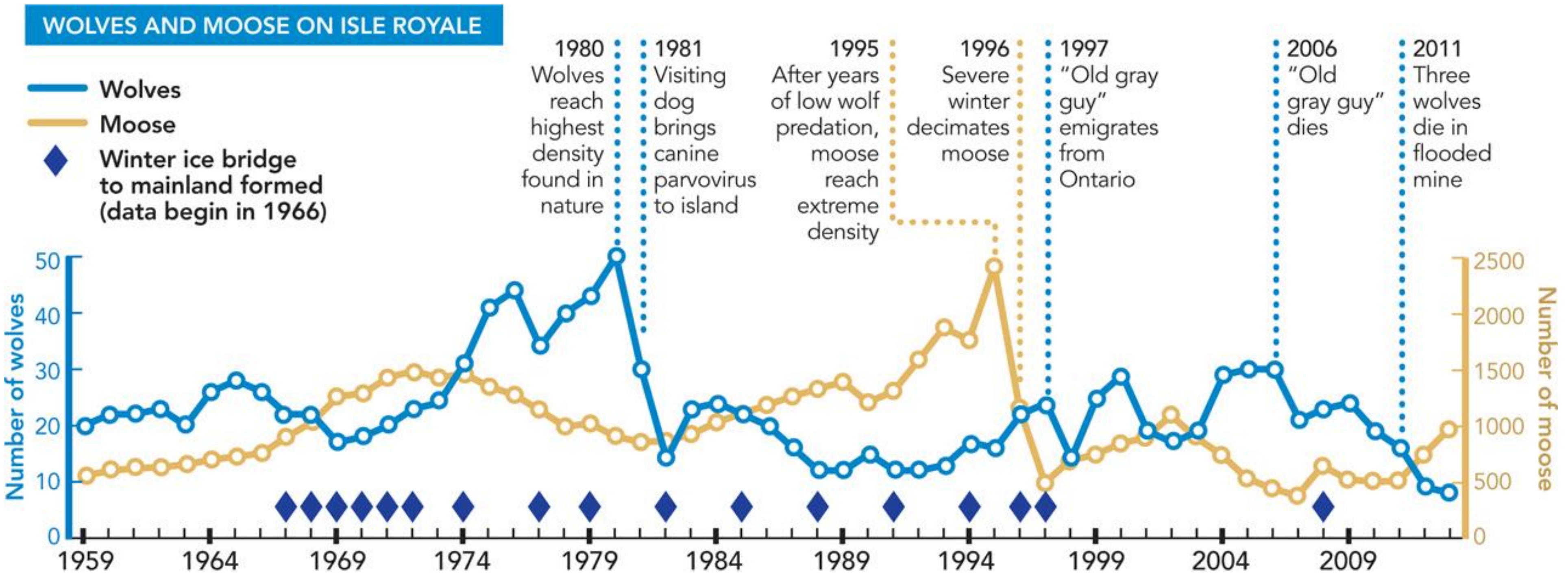
Historia modelu

Vito Volterra (1860–1940)

Alfred James Lotka (1880–1949)

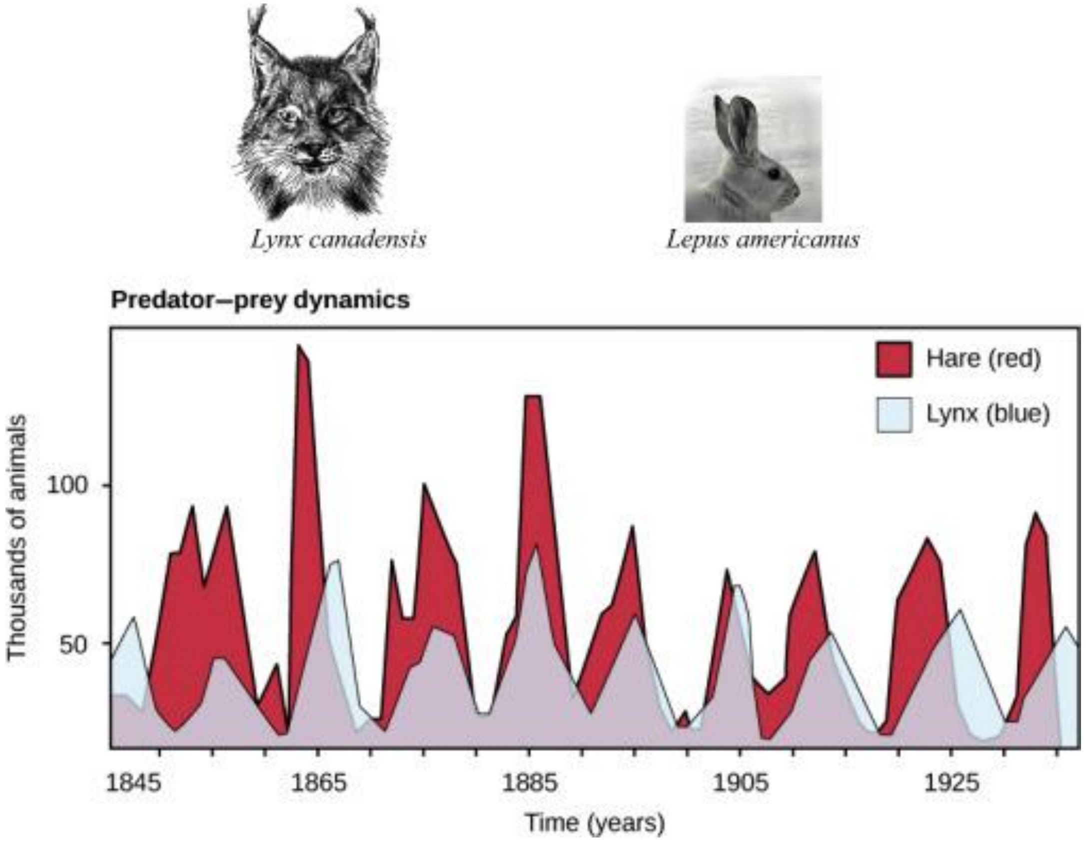
Model Lotki-Volterry

Przykład 1: Populacja łosi i wilków w Isle Royal



Źródło: Christine Mlot, *Are Isle Royale's Wolves Chasing Extinction?*, Science Vol. 304, Issue 635, pp. 919-921

Przykład 2: Populacja rysi i zajęcy w Kanadzie

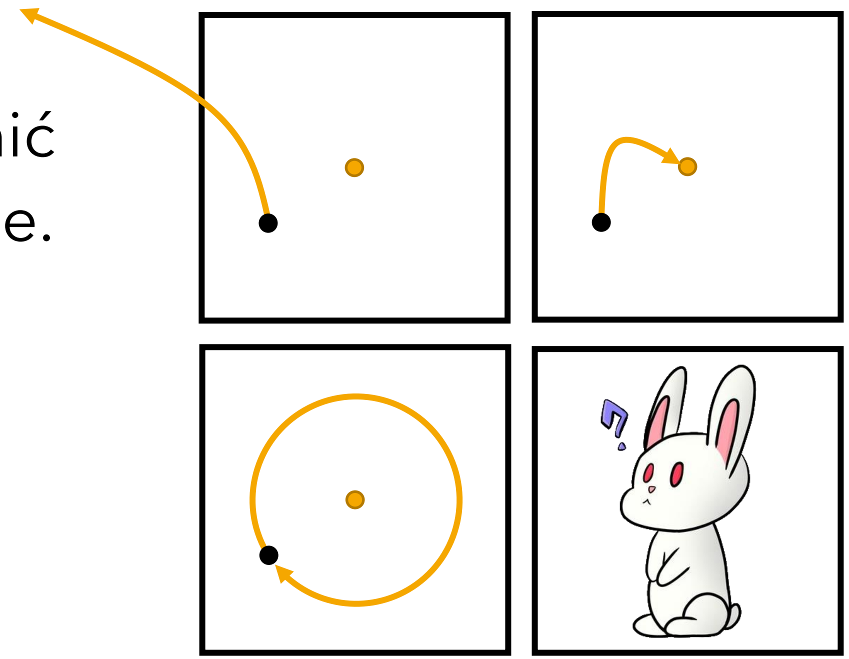


Hudson's Bay Company przez lata zbierało dane dot. liczby dostarczonych futer z zajęcy i rysi.

Źródło: Giovanni Giuseppe Bellani, Chapter 6 - Ecology and predation, Felines of the World, Academic Press, 2020, Pages 309-342,

Podsumowanie wykładu

- Równania różniczkowe pozwalają uwzględnić ewolucję więcej niż jednej zmiennej w czasie.
- Rozwiązanie układów dynamicznych może:
  1) dążyć do nieskończoności (model 1)
  2) dążyć do stanu stacjonarnego (model 2)
  3) tworzyć zamkniętą orbitę (model 3)
  4) …



A na następnym wykładzie….