Grafy.
5. i 7. Grafy i grafy
materiały do ćwiczeń

Projekt „Matematyka dla ciekawych świata”
spisał: Michał Korch, zadania pochodzą z różnych źródeł

22 marca 2021

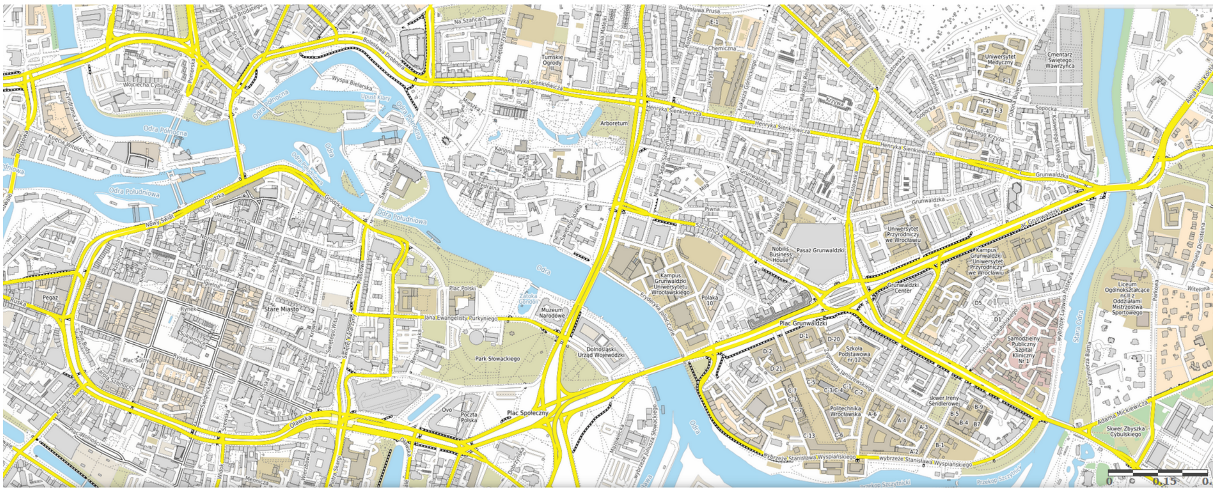
1 Skąd się biorą grafy?

Graf składa się z wierzchołków i krawędzi. Krawędź łączy dwa wierzchołki. Zwykło się zbiór wierzchołków w grafie oznaczać literą V (ang. vertices), a zbiór krawędzi literą E (edges).

Grafy pojawiają się dość naturalnie w analizowaniu problemów i sytuacji na świecie.

Zadanie 1

Oto mapa fragmentu Wrocławia. Narysujcie graf, którego wierzchołki odpowiadają poszczególnym częściom miasta, a krawędzie mostom pomiędzy nimi. Zignorujcie fosę widoczną na dole mapy, a wszelkie trudności interpretacyjne (czy coś jest mostem) rozstrzygnijcie dowolnie lub używając Google Maps.



Zadanie 2

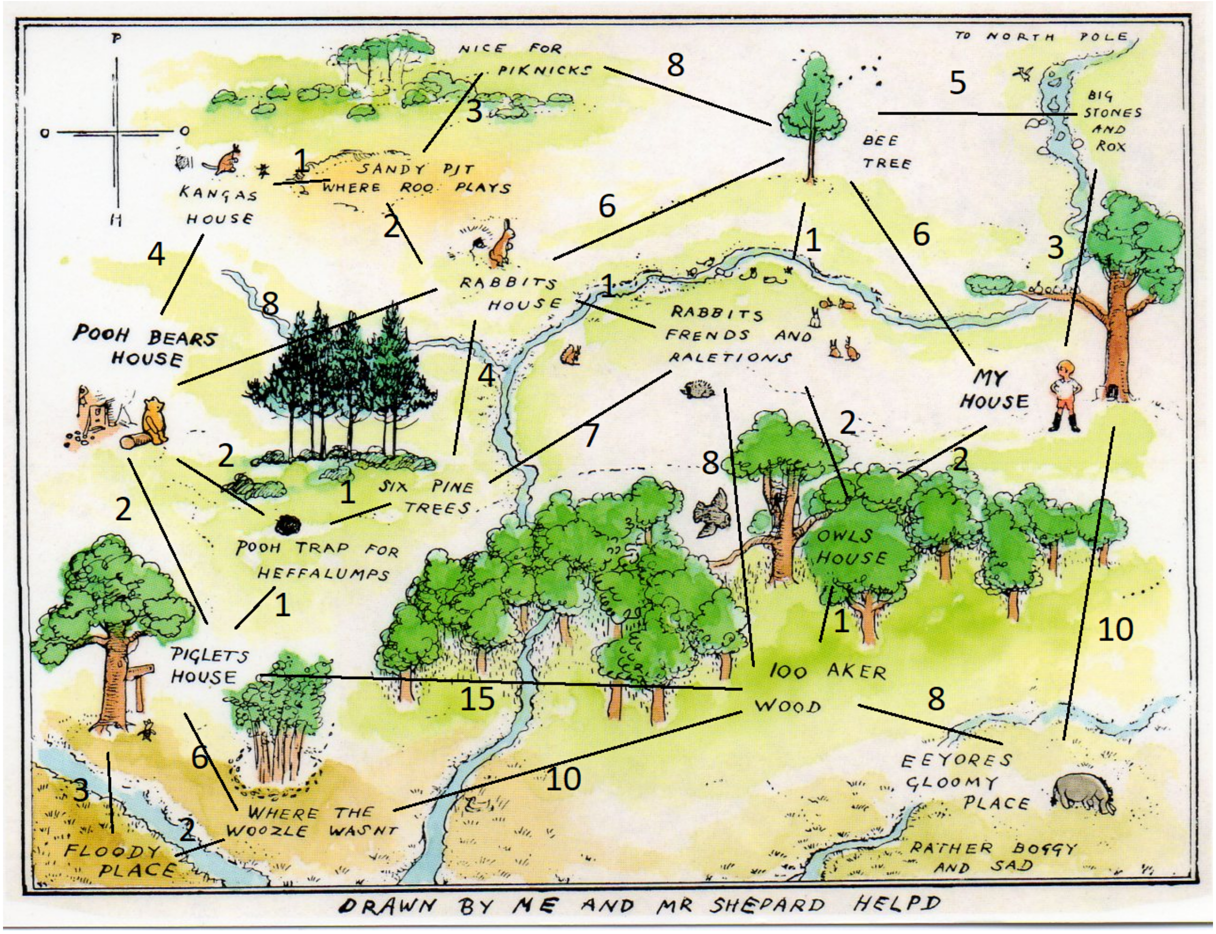
To jest natomiast mapa województw. Narysujcie graf, którego wierzchołki odpowiadają poszczególnym województwom, a krawędzie znajdują się pomiędzy województwami sąsiadującymi.

Zadanie 3

Narysuj graf, w którym wierzchołki to uczniowie w Twojej klasie w szkole, a krawędzie są pomiędzy osobami, które się dobrze znają (Twoim zdaniem). Czy powstały graf jest spójny, czyli czy każde dwie osoby łączy ciąg znajomości? Jeśli tak, to ile osób trzeba usunąć, aby Twoja klasa rozpadła się na więcej niż jedną część? Możecie tę liczbę potraktować jako miarę „zgrania" klasy i porównać ją z wynikiem innych osób w grupie. Swoją drogą takie analizy przeprowadza się też na sieciach terrorystów, żeby sprawdzić których najlepiej wyeliminować, aby rozpadła się cała siatka, ale to już zupełnie inna historia...

Zadanie 4

Oto mapa Stumilowego Lasu. Został na nią naniesiony graf łączący sąsiednie lokalizacje. Liczby przy krawędziach oznaczają czas potrzebny na przejście. Jak najszybciej może Krzyś dojść do chatki Puchatka? Jaka jest metoda, żeby to porządnie sprawdzić?



Wskazówka: Stwórzcie listę wszystkich lokalizacji. Najpierw wpiszcie czas dojścia przy lokalizacjach do których da się dojść bezpośrednio z domu Krzysia. Sprawdźcie teraz lokalizację z najmniejszą liczbą. Do jakich innych miejsc da się dojść z tego miejsca – powpisujcie te liczby sumując z czasem dojścia do lokalizacji, którą rozważacie, tam gdzie jeszcze nie ma żadnych liczb, lub tam, gdzie dotychczasowy czas jest większy od znalezionego. Następnie weźcie lokalizację z kolejną najmniejszą liczbą.

Kliką nazywamy graf, który ma wszystkie możliwe krawędzie (po jednej między każdymi dwoma różnymi wierzchołkami). Klikę o n wierzchołkach oznaczamy K_n.

Zadanie 5

Ile jest krawędzi w klice o 5 wierzchołkach? Ile w klice o 6 wierzchołkach?

Zadanie 6

A ile jest krawędzi w klice o n wierzchołkach?

Zadanie 7

Zróbcie rysunki wszystkich czternastu grafów o trzech wierzchołkach i trzech krawędziach.

Zadanie 8

Zróbcie rysunki wszystkich prostych grafów (bez krawędzi wielokrotnych i pętli) o czterech wierzchołkach i czterech krawędziach.

2 Stopnie wierzchołków

Stopień wierzchołka to liczba krawędzi, które z niego wychodzą. Co więcej, umówmy się, że w szczególnym przypadku, jeśli jakiś wierzchołek ma pętlę (krawędź z wierzchołka do niego samego), to krawędź ta wlicza się do jego stopnia jako dwa (czyli liczymy „końce” krawędzi).

Zadanie 9

Graf nazywamy regularnym, jeśli stopnie wszystkich jego wierzchołków są sobie równe. Które grafy z narysowanych w poprzednich dwóch zadaniach są regularne?

Zadanie 10

Udowodnijcie, następujący fakt zwany twierdzeniem o uściskach rąk. W każdym grafie liczba wierzchołków nieparzystego stopnia musi być parzysta.
Wskazówka: Każda krawędź ma dwa końce. Zatem suma stopni wszystkich wierzchołków musi być parzysta.

Zadanie 11

Podajcie przykład dwóch różnych grafów o takim samym ciągu stopni wierzchołków.

Zadanie 12

Udowodnijcie, że na każdym przyjęciu są dwie osoby o takiej samej liczbie znajomych.
Wskazówka: Rozważmy znajomości na przyjęciu jako graf o n wierzchołkach (osoby). Rozważcie przypadki – co jeśli jest jedna osoba, która nie zna nikogo? Co jeśli takich osób nie ma? Jakie są możliwe stopnie wierzchołków w tym grafie w każdym z tych przypadków?

Zadanie 13

Rozstrzygnijcie, czy istnieje graf o stopniach wierzchołków $3, 3, 3, 3, 5, 6, 6, 6, 6, 6, 6$.

Zadanie 14

Rozstrzygnijcie, czy istnieje graf o stopniach wierzchołków $3, 3, 3, 3, 3, 5, 6, 6, 6, 6, 6, 6$.

Zadanie 15

Rozstrzygnijcie, czy istnieje graf dwudzielny o stopniach wierzchołków $3, 3, 3, 3, 3, 5, 6, 6, 6, 6, 6, 6$. Graf jest dwudzielny, jeśli wierzchołki da się podzielić na dwa zbiory, takie, że wszystkie krawędzie łączą tylko wierzchołki należące do różnych zbiorów.

3 Spójność

Graf jest spójny, jeśli z każdego wierzchołka można dość do dowolnego innego wierzchołka.

Jeśli mamy dany graf G, to jego dopełnienie to graf o dokładnie tych samych wierzchołkach, ale mający krawędź pomiędzy wierzchołkami v i w wtedy i tylko wtedy, gdy graf G nie ma takiej krawędzi.

Zadanie 16

Udowodnijcie, że przynajmniej jeden z grafów G i dopełnienie G jest spójny.

Jeśli zaś graf nie jest spójny, jego spójne „fragmenty" nazywamy spójnymi składowymi.

Zadanie 17

Udowodnijcie, że graf prosty (bez pętli i krawędzi wielokrotnych) o k spójnych składowych spełnia

$$|V| - k \leq |E| \leq \frac{(|V| - k)(|V| - k + 1)}{2}.$$

Zadanie 18

Pokażcie, że tych oszacowań nie da się poprawić.

4 Cykle i ścieżki

Ścieżka to droga (to jest ciąg sąsiadujących krawędzi) w grafie, taka, że przez żadną krawędź nie przechodzimy więcej niż raz, a cykl to taka ścieżka, która zaczyna się i kończy w tym samym wierzchołku.

Ścieżka Eulera to droga (to jest ciąg sąsiadujących krawędzi) w grafie, która przechodzi przez każdą krawędź dokładnie raz.

Cykl Eulera w takim razie to ścieżka Eulera, która kończy się w tym samym wierzchołku, co się zaczyna (czyli droga zaczynająca i kończąca się w tym samym wierzchołku, ale przechodząca przez każdą krawędź grafu dokładnie raz).

Ścieżką Hamiltona w grafie jest ciąg krawędzi, idąc którym odwiedzamy każdy wierzchołek dokładnie raz. Cykl Hamiltona to w takim razie taka ścieżka Hamiltona, która zaczyna się i kończy w tym samym wierzchołku (liczymy wtedy, że został on odwiedzony tylko raz).

Zadanie 19

Podajcie przykład grafu, w którym

a) istnieje cykl Eulera i Hamiltona

b) istnieje cykl Eulera ale nie Hamiltona

c) istnieje cykl Hamiltona, ale nie Eulera

d) nie istnieje ani cykl Eulera i ani Hamiltona

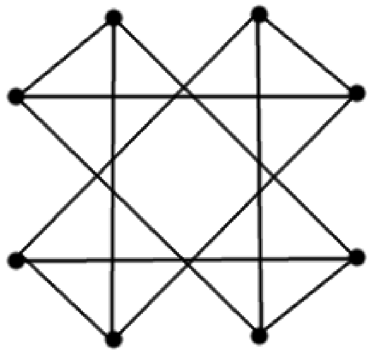
Udowodniliśmy twierdzenie Eulera, które mówi, że w grafie jest cykl Eulera wtedy i tylko wtedy, gdy wszystkie jego wierzchołki mają parzysty stopień. W grafie jest ścieżka Eulera wtedy i tylko wtedy, gdy dokładnie zero lub dwa wierzchołki mają nieparzysty stopień.

Sytuacja jest bardziej skomplikowana, gdy rozważymy ścieżki i cykle Hamiltona, czyli odpowiednio ścieżki i cykle, które przechodzą przez każdy wierzchołek dokładnie raz.

Nie znamy algorytmu, który potrafiłby poradzić sobie ze stwierdzeniem, czy w grafie jest cykl Hamiltona, w czasie wielomianowym. Co więcej jest to problem NP-zupełny, czyli jeśli da się znaleźć taki algorytm, to wszystkie problemy weryfikowalne w czasie wielomianowym, da się rozwiązać w czasie wielomianowym.

Zadanie 20

Rozstrzygnijcie, czy w poniższym grafie jest ścieżka Eulera?



Zadanie 21

Z kompletu 28 kostek domina (pary od $0-0$ do $6-6$) usunięto kostki $0-1$, $0-2$ i $0-3$. Ile jeszcze kostek domina trzeba usunąć, aby z pozostałych stworzyć zamknięty łańcuch kostek?
Wskazówka: Pomyślcie o grafie o wierzchołkach $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$*, a o kostkach jako o krawędziach w tym grafie.*

Zadanie 22

Udowodnijcie, że jeśli w spójnym grafie jest $k > 0$ wierzchołków o stopniu nieparzystym to k jest parzyste oraz $k/2$ to najmniejsza możliwa liczba krawędziowo rozłącznych ścieżek pokrywających wszystkie krawędzie.

Graf G o zbiorze wierzchołków V nazywamy pełnym grafem dwudzielnym, jeśli V dzieli się na dwa zbiory V_1, V_2, takie, że G ma krawędź pomiędzy wierzchołkami v i w wtedy i tylko wtedy, gdy $v \in V_i$, $w \in V_j$ i $i \neq j$. Graf pełny dwudzielny dla którego $|V_1| = k$ oraz $|V_2| = n$ oznaczamy $K_{n,m}$.

Graf G o zbiorze wierzchołków V nazywamy pełnym grafem trójdzielnym, jeśli V dzieli się na dwa zbiory V_1, V_2, V_3, takie, że G ma krawędź pomiędzy wierzchołkami v i w wtedy i tylko wtedy, gdy $v \in V_i$, $w \in V_j$ i $i \neq j$.

Rozważmy teraz ścieżki Eulera i Hamiltona w takich grafach.

Zadanie 23

Które pełne grafy dwudzielne i trójdzielne są mają ścieżkę Eulera, a które ścieżkę Hamiltona?

Zadanie 24

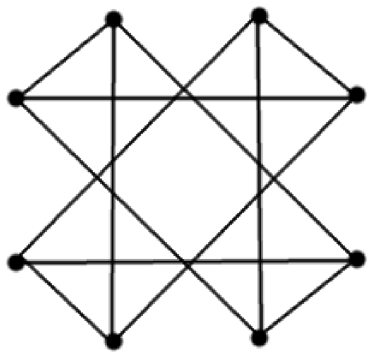
Zaprojektujcie algorytm, który mając dany graf, w którym istnieje ścieżka Eulera, znajduje ją.

5 Grafy planarne

Graf jest planarny, jeśli można go narysować na płaszczyźnie tak, żeby krawędzie się nie przecinały.

Zadanie 25

Rozstrzygnijcie, czy poniższy graf jest planarny?



Graf jest prosty, jeśli nie ma multikrawędzi (każde dwa wierzchołki łączy co najwyżej jedna krawędź) oraz nie ma pętli (krawędzi które łączą wierzchołek z nim samym).

Przypomnijmy też, że kliką nazywamy graf prosty, w którym każde dwa wierzchołki są połączone krawędzią. Klikę o n wierzchołkach oznaczamy K_n.

Natomiast graf jest dwudzielny, jeśli zbiór wszystkich wierzchołków można podzielić na dwa zbiory A i B, takie że żadne dwa wierzchołki należące do A nie są połączone krawędzią, oraz żadne dwa wierzchołki należące do B nie są połączone krawędzią. Graf dwudzielny jest pełny, jeśli poza tym każdy wierzchołek z A jest połączony z każdym wierzchołkiem z B dokładnie jedną krawędzią. Pełny graf dwudzielny oznaczamy $K_{n,m}$, gdzie n to liczba elementów w zbiorze A, natomiast m to liczba elementów w zbiorze B.

K_5 oraz $K_{3,3}$ to standardowe przykłady grafów nieplanarnych. Co więcej, twierdzenie Kuratowskiego stanowi, że graf jest nieplanarny wtedy i tylko wtedy, gdy można w nim „znaleźć” K_5 lub $K_{3,3}$.

Zadanie 26

Rozważmy graf K_8. Ile jest w nim podgrafów takich samych, jak K_5?

Udowodniliśmy, że dla każdego spójnego (czyli takiego, że pomiędzy każdymi dwoma wierzchołkami istnieje droga) grafu planarnego zachodzi wzór Eulera:

$$w - k + s = 2,$$

gdzie w to liczba jego wierzchołków, k to liczba jego krawędzi, a s to liczba jego ścian. Ściany to elementy, na które rozpadłaby się płaszczyzna, gdybyśmy przecięli ją wzdłuż krawędzi grafu. Czyli w szczególności liczymy też obszar „na zewnątrz” grafu jako ścianę.

Zadanie 27

Pokażcie, że jeśli prosty spójny graf planarny nie zawiera ścian trójkątnych oraz ma co najmniej 3 wierzchołki, to $k \leq 2w - 4$, gdzie k to liczba krawędzi w grafie, a w to liczba wierzchołków w grafie.

6 Kolorowanie

Zagadnienie kolorowania map to pytanie ile kolorów potrzeba, by pokolorować mapę tak, żeby kraje sąsiadujące (odcinkiem granicy, a nie tylko punktem) były różnych kolorów. To zadanie odpowiada zadaniu polegającym na znalezieniu liczby kolorów potrzebnych do pokolorowania grafu planarnego tak, żeby każde dwa wierzchołki połączone krawędzią były różnych kolorów.

Łatwo udowodnić, że wystarczy 6 kolorów. Nieco trudniej udowodnić, że wystarczy 5 kolorów. Tak naprawdę wystarczą 4 kolory, ale fakt ten przez długo był pytaniem otwartym. Dowód skonstruowano dopiero w drugiej połowie XX wieku, i wymagał rozważenie ponad 2000 przypadków, co było możliwe tylko przy użyciu komputera.

Zadanie 28

Narysujcie mapę, której nie da się pokolorować trzema kolorami tak, żeby kraje sąsiadujące (odcinkiem granicy, a nie tylko punktem) były różnych kolorów.

Zadanie 29

Udowodnijcie, że graf można pokolorować dwoma kolorami (kolorujemy wierzchołki, tak że żadne dwa wierzchołki połączone krawędzią nie są tego samego koloru) wtedy i tylko wtedy, gdy jest dwudzielny.

Z zagadnieniem kolorowania grafów jest też związany problem strażników w muzeum. Dotyczą go następne kilka zadań.

Zadanie 30

Załóżmy, że sala muzeum ma kształt wielokąta (w tym zadaniu będziemy rozważać wielokąty, które nie są wypukłe). Dyrektor muzeum musi ustawić w sali tylu (nieruchomych) strażników, żeby każdy jej punkt był w zasięgu wzroku chociaż jednego z nich. Znajdźcie przykład takiego wielokąta o 12 ścianach, że do jego pilnowania potrzeba aż 4 strażników. Ogólniej, zaproponujcie, jak znaleźć wielokąt o $3k$ ścianach, że do jego pilnowania potrzeba aż k strażników.
Wskazówka: Zastanówcie się nad wielokątami kształtem przypominającymi grzebień.

Zadanie 31

Niech będzie dany wielokąt. Dorysowujemy do niego niektóre przekątne, tak żeby podzielić go na trójkąty. Powstał w ten sposób graf, którego wierzchołki to wierzchołki wielokąta, a krawędzie to jego boki oraz dorysowane przekątne. Udowodnijcie, że wierzchołki takiego grafu można zawsze pokolorować trzema kolorami, tak że żadne dwa sąsiadujące wierzchołki nie są pokolorowane tym samym kolorem.
Wskazówka: Jeśli ten wielokąt to trójkąt, to zadanie jest oczywiste. Jeśli nie, to podzielcie problem

na dwa mniejsze, wybierając przekątną (zawsze dzieli wielokąt na dwa mniejsze) i następnie sklejcie odpowiednio uzgadniajcie kolorowanie.

Zadanie 32

Załóżmy, że sala muzeum ma kształt wielokąta (w tym zadaniu będziemy rozważać wielokąty, które nie są wypukłe). Dyrektor muzeum musi ustawić w sali tylu (nieruchomych) strażników, żeby każdy jej punkt był w zasięgu wzroku chociaż jednego z nich. Udowodnijcie, że jeśli sala ma m boków zawsze wystarczy do jej pilnowania $\lfloor m/3 \rfloor$ (zaokrąglenie w dół) strażników.
Wskazówka: Skorzystajcie z poprzedniego zadania.

7 Drzewa i lasy

Graf nazywamy drzewem jeśli nie ma w nim żadnych cykli i jest spójny. Las to graf, który spełnia pierwsze z tych wymagań, zatem spójne składowe lasu to drzewa.

Zadanie 33

Narysujcie wszystkie możliwe drzewa:

a) o trzech wierzchołkach,

b) o czterech wierzchołkach,

c) o pięciu wierzchołkach,
Wskazówka: Różnych drzew o pięciu wierzchołkach jest trzy.

d) o sześciu wierzchołkach.

Zadanie 34

Pokażcie, że następujące warunki są równoważne:

a) T jest drzewem,

b) T nie ma cykli i ma $|V| - 1$ krawędzi,

c) T jest spójny i ma $|V| - 1$ krawędzi,

d) T jest spójny, a usunięcie jednej krawędzi tworzy dwie spójne składowe,

e) dwa wierzchołki T są połączone dokładnie jedną drogą,

f) T nie zawiera cykli lecz dodanie nowej krawędzi tworzy cykl.

8 Proponowane zadania domowe

Oddając zadania domowe możesz każdorazowo wysłać dowolny ich zestaw, którego suma punktów jest nie większa niż 6.

Zadanie 35 (1 punkt)

Zrób rysunki wszystkich pięciu grafów o czterech wierzchołkach, z których każdy na stopień 2.

Zadanie 36 (1 punkt)

Czy mosty Wrocławia z zadania 1 da się przejść tak, aby każdy z nich przejść dokładnie raz? A co jeśli pominiemy mosty prowadzące na wyspy, z których żaden inny most nie wychodzi? Dlaczego?

Zadanie 37 (1 punkt)

Czy jest możliwe, aby owad poruszający się po krawędziach sześcianu (tak, że odwiedza krawędź najwyżej raz) przeszedł

a) każdą krawędź dokładnie raz?

b) każdy wierzchołek dokładnie raz?

Zadanie 38 (1 punkt)

Rozstrzygnij, czy grafy $K_{3,3}, K_5, K_{4,4}, K_6$ mają ścieżkę Eulera.

Zadanie 39 (1 punkt)

Ile kolorów jest niezbędnych do pokolorowania mapy województw z drugiego zadania? Dlaczego? Jak takie kolorowanie wygląda?

Zadanie 40 (1 punkt)

Podaj przykład grafu (z racji rzeczy nieplanarnego), o stopniach wierzchołków mniejszych lub równych 7, który nie da się pokolorować mniej niż 8 kolorami.

Zadanie 41 (2 punkty)

Zrób rysunki wszystkich grafów regularnych o czterech wierzchołkach, z których każdy na stopień 3.

Zadanie 42 (2 punkty)

Ile ścian może mieć wielościan wypukły o n wierzchołkach i m krawędziach?
Wskazówka: Przerób go na graf i zastosuj wzór Eulera.

Zadanie 43 (2 punkty)

Udowodnij, że każdy las o k spójnych składowych ma $|V| - k$ krawędzi.

Zadanie 44 (3 punkty)

Udowodnij, że każdy graf, w którym każdy wierzchołek ma stopień co najmniej 2, zawiera cykl.
Wskazówka: Dowód podobny do pierwszej części dowodu twierdzenia Eulera.

Zadanie 45 (3 punkty)

Udowodnij, że każdy graf o n wierzchołkach i co najmniej n krawędziach zawiera cykl.
Wskazówka: Skorzystaj z poprzedniego zadania.