Grafy.
9., 11. i 13. Nieskończone imprezy
materiały do ćwiczeń

Projekt „Matematyka dla ciekawych świata”
spisał: Michał Korch, zadania pochodzą z różnych źródeł

5 maja 2021

1 Elementy i podzbiory

Na dzisiejszych zajęciach będziemy przede wszystkim zajmować się zbiorami. Zbiór jest w matematyce pojęciem pierwotnym, co oznacza, że każde inne matematyczne pojęcie można (w mniej, a z reguły bardziej) zawiły sposób zdefiniować używając pojęcia zbioru. Samo jednak pojęcie zbioru nie ma swojej ścisłej definicji, choć można opisać jego właściwości, zwane czasem aksjomatami – ale o tym jeszcze za chwilę.

W każdym razie, wszyscy prawdopodobnie mają pojęcie, co to zbiór. Zbiory mają elementy. To jest ich kluczowa cecha. Do tego stopnia, że powiemy, że jeśli badamy zbiór A oraz zbiór B i okaże się, że mają te same elementy (czyli każdy element jest w zbiorze A wtedy i tylko wtedy, gdy jest w zbiorze B), to powiemy, że zbiory A i B są równe. Oczywiście z tego w szczególności wynika, że $\{0,0\}$ oraz $\{0\}$ to opisy jednego i tego samego zbioru. Podobnie $\{0,1\}$ oraz $\{1,0\}$.

Natomiast podzbiorem danego zbioru nazywamy zbiór do którego należą tylko i wyłącznie niektóre (ale być może wszystkie albo żaden) elementy tego zbioru. Czyli, jeśli $A = \{1,2,3\}$, to zarówno $\{1,2\}$ jest podzbiorem $\{1,2,3\}$, ale również na przykład, $\varnothing$ jest też podzbiorem $\{1,2,3\}$.

Zadanie 1

Wskażcie wszystkie elementy i podzbiory zbioru $\{0,1,2,3\}$.

Bardzo często (a może nawet, jak się okaże, zawsze) w matematyce elementami zbiorów są inne zbiory. Oto taki, być może dziwnawy na pierwszy rzut oka zbiór. Rozszyfrujmy go, wskazując w nim wszystkie elementy i wszystkie podzbiory!

Zadanie 2

Wskażcie wszystkie elementy i podzbiory zbioru $\{\varnothing,\{\varnothing\},\{\varnothing,\{\varnothing\}\}\}$,

Zadanie 3

Wypiszcie wszystkie elementy i podzbiory zbioru $\{\varnothing,\mathbb{N},\{0\},8\}$.

Zadanie 4

Prawdopodobnie zauważyliście pewną prawidłowość dotyczącą tego ile jest podzbiorów skończonego zbioru n-elementowego. Sformułujcie ją i uzasadnijcie.

2 Operacje na zbiorach

Zbiory można ze sobą sumować. Suma zbiorów A i B, czyli $A \cup B$ to zbiór, do którego należą wszystkie elementy, które są w A lub w B. Natomiast przecięcie (inaczej, część wspólna lub iloczyn) zbiorów w A i B to zbiór $A \cap B$, do którego należą wszystkie elementy będące jednocześnie w A i w B. No i w końcu różnica zbiorów A i B, czyli $A \setminus B$, to zbiór tych elementów, które są w A, a nie są w B, zaś różnica symetryczna $A \triangle B$ to zbiór tych elementów, które są w jednym ze zbiorów A lub B, ale nie w obu.

Zadanie 5

Niech $A = \{1, 2, 3, 4\}$ oraz $B = \{1, 3, 5, 7\}$. Oblicz: $A \cup B, B \cap A, A \setminus B, B \setminus A$ oraz $\mathcal{P}(A)$.

Zadanie 6

Znajdź $\{\varnothing\} \cup \{\varnothing, \{\varnothing\}\}$ oraz $\{\varnothing\} \cap \{\varnothing, \{\varnothing\}\}$.

Zadanie 7

Czy jeśli $A \subseteq B$, to $A \cap B = A$ oraz $A \cup B = B$?

Zadanie 8

Naszkicujcie na układzie współrzędnych zbiory $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$ oraz $A \triangle B$, jeśli A to zbiór wszystkich punktów na płaszczyźnie o współrzędnych (x, y) spełniających warunek $|x| + |y| \leq 1$, zaś B to zbiór wszystkich punktów na płaszczyźnie o współrzędnych (x, y), spełniających warunek $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 < 1$.
Wskazówka: Zauważ, że zbiór A to kwadrat o wierzchołkach $(1, 0), (0, 1), (-1, 0), (0, -1)$*, zaś zbiór B to koło o środku w punkcie* $(1, 1)$ *i promieniu* 1*. Dlaczego tak jest?*

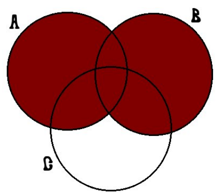
Zadanie 9

Wskażcie wszystkie elementy i podzbiory zbioru $\{\varnothing, \{\{\varnothing\}\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\} \setminus \{\varnothing\}, \{\varnothing\} \cap \{\varnothing, \{\varnothing\}\}\}$.
Wskazówka: Pamiętajcie, że np. $\{0, 0\} = \{0\}$*.*

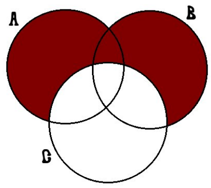
Można też z łatwością zauważyć, że czasem niezależnie od tego jakie weźmiemy zbiory, pewne operacje prowadzą do tego samego. Na przykład, niezależnie od tego, czym są zbiory A, B oraz C, zawsze: $(A \cup B) \setminus C = (A \setminus C) \cup (B \setminus C)$.

Jak to udowodnić? Można to zrobić jedną z trzech metod. Można całą sytuację narysować. Takie rysunki nazywają się diagramami Venna:

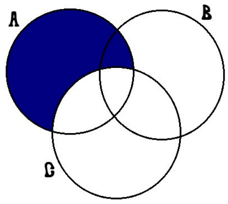
Rozważamy lewą stronę: $A \cup B$:



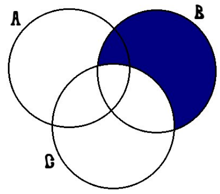
czyli lewa strona to:



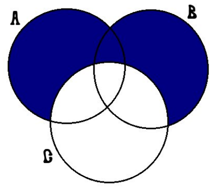
Patrzymy na prawą: $A \setminus C$:



$B \setminus C$:



czyli prawa strona to:



Zgadza się. □

Alternatywnie, można sprawdzić, że to prawda w przypadku tzw. rodziny niezależnej. Jest to taki zestaw zbiorów A, B, C, który ma tę własność, że w każdym polu diagramu Venna jest co najmniej jeden element. Na przykład, możemy wziąć elementy $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$, w stworzyć z nich rodzinę niezależną. $A = \{1, 2, 3, 4\}, B = \{2, 4, 5, 6\}, C = \{3, 4, 6, 7\}$. Jest to rodzina niezależna, co łatwo, choć żmudnie, można sprawdzić. Jeśli sprawdzana równość $(A \cup B) \setminus C = (A \setminus C) \cup (B \setminus C)$ jest prawdziwa w przypadku rodziny niezależnej, będzie prawdziwa zawsze.

Zatem obliczamy lewą stronę: $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}, (A \cup B) \setminus C = \{1, 2, 5\}$ i prawą: $A \setminus C = \{1, 2\}, B \setminus C = \{2, 5\}, (A \setminus C) \cup (B \setminus C) = \{1, 2, 5\}$, zgadza się. □

W końcu trzecia metoda, to przeprowadzenie pełnego dowodu, to znaczy sprawdzenie, że jeśli jakiś element należy do lewej strony, to należy też do prawej, a jeśli należy do lewej, to również należy do prawe. A potem na odwrót, że jeśli należy do prawej, to również należy do lewej. Do dzieła. Niech $x \in (A \cup B) \setminus C$, wtedy $x \in A \cup B$ oraz $x \notin C$, a zatem $x \in A$ lub $x \in B$, ale $x \notin C$, czyli $(x \in A \wedge x \notin C) \vee (x \in B \wedge x \notin C)$, czyli $x \in A \setminus C$ lub $x \in B \setminus C$, zatem $x \in (A \setminus C) \cup (B \setminus C)$.
W drugą stronę, niech teraz $x \in (A \setminus C) \cup (B \setminus C)$, zatem $x \in A \setminus C$ lub $x \in B \setminus C$, a zatem $x \in A$ lub $x \in B$, ale w obu wypadkach pod warunkiem, że $x \notin C$. Zatem $x \in A \cup B$, ale $x \notin C$, zatem $x \in (A \cup B) \setminus C$. □

Zadanie 10

Udowodnicie, że dla dowolnych zbiorów A, B, C, zachodzi $A \cap (B \triangle C) = (A \cap B) \triangle (A \cap C)$.

Trochę trudniej może być udowodnić, że nie tyle dla każdych zbiorów jakaś równość zachodzi, a raczej zachodzi pod pewnym warunkiem. Trzeba wtedy przeprowadzić dowód w tym trzecim ze stylów i prawdpodobnie będzie niezbędne skorzystanie w nim z przedstawionego założenia.

Zadanie 11

Używając metody opisanej wyżej udowodnijcie, że jeśli $A \triangle B = C$, to $B = A \triangle C$

Aby udowodnić, że własność $W1$ zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy własność $W2$, trzeba udowodnić zarówno, że jeśli zachodzi $W1$ to zachodzi $W2$, jak i że jeśli zachodzi $W2$ to zachodzi $W1$. Zatem następujące zadanie można traktować jako właśnie takie podwójne zadanie.

Zadanie 12

Udowodnijcie, że dla każdych zbiorów A, B, C, zachodzi $(B \triangle C) \cap A \subseteq B$, wtedy i tylko wtedy, gdy zachodzi $B \cap C \cap A \supseteq C \cap A$

3 Hotel Hilberta

Wykonując myślowy eksperyment z hotelem Hilberta, ustawialiśmy w pary nieskończenie wiele jednoosobowych pokoi hotelu ponumerowanych liczbami naturalnymi (poczynając od zera) w pary z elementami zbioru gości. Zastanawialiśmy się nad zakwaterowaniem nowego gościa (nazwijmy go gościem -1) w sytuacji, w której wszystkie nieskończenie wiele pokoi jest zajętych (nazwijmy gościa, który jest w pokoju numer n, gościem n). Okazało się, że nowego gościa możemy dokwaterować mimo zajętości wszystkich pokoi, przesuwając każdego z dotychczasowych gości do pokoju o numerze o jeden większym. Wtedy pokój zerowy będzie pusty i możemy tam zakwaterować gościa -1. Rzeczywiście przyporządkowaliśmy w pary elementy zbioru gości $\{-1, 0, 1, 2, \ldots\} = \{-1\} \cup \mathbb{N}$ z elementami zbioru pokoi $\{0, 1, 2, 3, \ldots\} = \mathbb{N}$, przyporządkowując gościowi n pokój o numerze $n + 1$. Inaczej mówiąc, dowiedliśmy, że zbiory $\{-1\} \cup \mathbb{N}$ oraz $\mathbb{N}$ są równoliczne, co zapisujemy $|\mathbb{N} \cup \{-1\}| = |\mathbb{N}|$.

Zadanie 13

W jaki sposób do hotelu Hilberta zakwaterować wszystkie elementy zbioru $\mathbb{N} \setminus \{2021\}$, ale w taki sposób, żeby wszystkie pokoje były zajęte?

Zadanie 14

W jaki sposób do hotelu Hilberta zakwaterować wszystkie elementy zbioru liczb parzystych, tak aby, żeby wszystkie pokoje były zajęte?

Taki zbiór, który da się zakwaterować do hotelu Hilberta nazywamy *zbiorem przeliczalnym*.

Zadanie 15

Sprawdźcie czy zbiór wszystkich skończonych ciągów zero-jedynkowych jest przeliczalny.

Zadanie 16

Sprawdźcie czy zbiór wszystkich skończonych ciągów liczb naturalnych jest przeliczalny.

4 Równoliczność

Zbiory A i B są równoliczne (co oznaczane jest jako $|A| = |B|$), jeśli elementy zbioru A można ustawić w pary ze wszystkimi elementami zbioru B, tak że każdy z elementów jest w dokładnie jednej parze.

Zadanie 17

Niech A oraz B będą zbiorami, których elementy da się zakwaterować w hotelu Hilberta tak, aby wszystkie pokoje były zajęte. Czy A i B są równoliczne?

Zadanie 18

Udowodnijcie, że przedział otwarty $(-1,1)$ jest równoliczny z przedziałem $(2,4)$.

Zadanie 19

Udowodnijcie, że przedział otwarty $(0,1)$ jest równoliczny ze zbiorem wszystkich liczb rzeczywistych.

Zadanie 20

Udowodnijcie zatem, że przedział domknięty $[0,1]$ jest równoliczny ze zbiorem wszystkich liczb rzeczywistych.
Wskazówka: Pomyślcie, jak w tym przedziale „zanurzyć" hotel Hilberta, a następnie przesuńcie gości o dwa pokoje.

Zadanie 21

Udowodnijcie, że przedział $(0,1)$ jest równoliczny ze zbiorem $(0,1] \cup \{2,3\}$.

Zadanie 22

Sprawdźcie, czy dla dowolnych zbiorów A, B, C, D, jeśli $|A| = |C|$ oraz $|B| = |D|$, to $|A \cup B| = |C \cup D|$.

Zadanie 23

Czy prawdą jest, że dla dowolnych zbiorów A, B następujące stwierdzenie jest prawdziwe: jeśli $|A| = |B|$, to $|A \setminus B| = |B \setminus A|$? Odpowiedź uzasadnijcie!

Zadanie 24

Czy prawdą jest, że dla dowolnych zbiorów A, B następujące stwierdzenie jest prawdziwe: jeśli $|A \setminus B| = |B \setminus A|$, to $|A| = |B|$? Odpowiedź uzasadnijcie!

Zadanie 25

Udowodnijcie, że jeśli elementy zbioru A da się zakwaterować w hotelu Hilberta, to zbiór wszystkich par elementów zbioru A także da się zakwaterować w hotelu Hilberta.

5 Zbiory nierównoliczne

Zbiory równoliczne ze zbiorem liczb naturalnych (czyli takie, które da się zakwaterować w hotelu Hilberta) nazywamy zbiorami przeliczalnymi. Udowodniliśmy, że zbiór liczb całkowitych, zbiór par liczb naturalnych oraz zbiór liczb wymiernych są przeliczalne.

Zbiory równoliczne ze zbiorem liczb rzeczywistych nazywamy zbiorami mocy kontinuum. Powiedzieliśmy sobie, że $[0,1]$, zbiór wszystkich nieskończonych ciągów zero-jedynkowych oraz $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ są takiej mocy. Udowodniliśmy także, że jest to moc większa od zbioru liczb naturalnych.

Twierdzenie Cantora mówi, że dla każdego zbioru $|A| < |\mathcal{P}(A)|$.

Zadanie 26

Udowodnijcie, że istnieje liczba rzeczywista niebędąca pierwiastkiem żadnego równania drugiego stopnia o współczynnikach wymiernych.

Zadanie 27

Rozstrzygnij, czy zbiór wszystkich punktów płaszczyzny o obu współrzędnych całkowitych jest przeliczalny, czy też mocy kontinuum.

Zadanie 28

Rozstrzygnij, czy zbiór wszystkich ciągów zerojedynkowych, które od pewnego miejsca mają już tylko zera jest przeliczalny, czy też mocy kontinuum.

Zadanie 29

Udowodnij Tw. Cantora, czyli że żaden zbiór A nie jest równoliczny ze zbiorem wszystkich swoich podzbiorów.
Wskazówka: Dowód nie wprost. Załóż, że można ustawić w pary zbiór A i jego podzbiory, tak że wszystkie podzbiory są w jakiejś parze. Użyj teraz argumentu przekątniowego konstruując na złość „zły” podzbiór. Uzależnij mianowicie to, czy $a \in A$ należy do „złego” podzbioru od tego, czy nie należy do zbioru stojącego w parze z elementem a. Okaże się, co jest sprzeczne z naszym początkowym założeniem, że „zły” podzbiór nie stoi w żadnej parze.

Zadanie 30

Załóżmy, że wybraliśmy pewną kolekcję otwartych przedziałów na prostej rzeczywistej, ale tak, że żadne dwa wybrane przedziały się nie przecinają. Udowodnij, że wybraliśmy co najwyżej przeliczalnie wiele przedziałów.
Wskazówka: $\mathbb{Q}$.

Zadanie 31

Udowodnij, że zbiór $\mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$ jest mocy kontinuum.

Zadanie 32

Udowodnij, że zbiór liczb niewymiernych jest mocy kontinuum.

Zadanie 33

Niech $X \subseteq \mathbb{R}$. Powiemy, że punkt $x \in X$ jest punktem izolowanym, jeśli istnieje przedział otwarty (a, b) taki, że $a < x < b$ oraz $(a, b) \cap X = \{x\}$. Udowodnij, że zbiór punktów izolowanych zbioru X jest co najwyżej przeliczalny.
Wskazówka: Każdemu punktowi izolowanemu x przyporządkuj taki przedział (p, q) o końcach wymiernych, że $(p, q) \cap X = \{x\}$. Zauważ, że właśnie ustawiliśmy w pary nasze wszystkie punkty izolowane z przedziałami o końcach wymiernych (niekoniecznie wszystkimi).

Zadanie 34

Wyobraźmy sobie mapę nieskończonego lasu na płaszczyźnie, w którym drzewa rosną na wszystkich (i tylko na takich) punktach o obu współrzędnych całkowitych. Czy osoba stojąca w punkcie $(0,0)$ jest w stanie znaleźć taki kierunek na którym nie napotka żadnego drzewa? (Na potrzebę zadania drzewa są nieskończenie cienkie).

6 Twierdzenie Ramseya

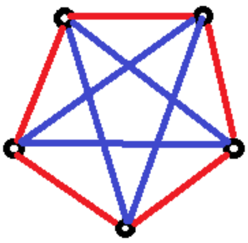
Nieskończone tw. Ramseya mówi, że jeśli rozważymy graf o przeliczalnie wielu wierzchołkach (np. ponumerowanych liczbami naturalnymi), w którym jest dokładnie jedna krawędź pomiędzy każdymi dwoma wierzchołkami, oraz każdą z tych krawędzi pokolorujemy dowolnie na jeden ze skończenie wielu kolorów, to da się znaleźć nieskończenie wiele wierzchołków pomiędzy którymi krawędzie są w tym samym kolorze.

Na wykładzie pokażemy, że z tego wynika następujące skończone twierdzenie Ramseya. Dla każdej (skończonej!) liczby kolorów k oraz dla każdej liczby naturalnej n istnieje taka liczba naturalna r, że jeśli krawędzie kliki r-wierzchołkowej (czyli grafu, w którym jest dokładnie jedna krawędź pomiędzy każdymi dwoma wierzchołkami) pokolorujemy dowolnie na k kolorów, to zawsze znajdziemy takie n wierzchołków, że wszystkie krawędzie pomiędzy nimi są pokolorowane na ten sam kolor.

Najmniejszą możliwą liczbę r dla danych n oraz k nazywamy liczbą Ramseya.

Jeśli rozważymy zbiór ludzi (np. imprezę), to możemy wyobrazić sobie krawędzie pomiędzy tymi ludźmy i pokolorować je na dwa kolory, np. na niebiesko, jeśli te dwie osoby się znają, a na czerwono, jeśli się nie znają. Wnioskiem z tw. Ramseya jest więc to, że dla każdej liczby n istnieje taka liczba r, że na r-osobowej imprezie na pewno znajdziemy n osób, które albo się wzajemnie wszystkie znają, albo wszystkie wzajemnie nie znają.

Okazuje się, że dla $n = 3$ i $k = 2$, najmniejsza taka liczba to $r = 6$ (czyli $r = 6$ jest liczbą Ramseya dla $n = 3$ i $k = 2$). Można to relatywnie prosto sprawdzić. Rzeczwiście, poniższy rysunek pokazuje imprezę 5-cio osobową, w której nie ma takich szukanych 3 osób, a więc $r > 5$.



Z drugiej strony, na 6-cio osobowej imprezie zawsze takie 3 osoby znajdziemy. Rzeczywiście, bo z każdego wierzchołka wychodzi 5 krawędzi. Ustalmy wierzchołek v. Zatem trzy z tych dwóch krawędzi są jednego koloru (na mocy zasady szufladkowej Dirichleta), bez straty ogólności czerwone. Idą do wierzchołków x, y, z. Ale jeśli wszystkie krawędzie pomiędzy x, y i z są niebieskie, stanowią trójkąt. Załóżmy więc przeciwnie, że jedna z nich, bez straty ogólności x, y jest czerwona. Ale wtedy v, x, y jest czerwonym trójkątem. Wobec tego $r \geq 6$, a zatem $r = 6$.

Zadanie 35

Udowodnijcie, że jeśli liczby naturalne > 0 zostaną pokolorowane na skończoną liczbę kolorów, to znajdą się takie trzy różne liczby x, y, z w tym samym kolorze, że $x + y = z$.

Wskazówka: Zdefiniujmy kolorowanie krawędzi w klice o wierzchołkach będących liczbami naturalnymi takie, że kolor krawędzi i, j to kolor $|i - j|$ w rozważanym kolorowaniu liczb naturalnych.

Zadanie 36

Udowodnijcie, że w klice o 10 wierzchołkach, której krawędzie pokolorowano dowolnie na dwa kolory znajdzie się 4 wierzchołki pomiędzy którymi krawędzie są w tym pierwszym z tych kolorów lub 3 wierzchołki pomiędzy którymi krawędzie są w drugim z tych kolorów.

Powyższe rozumowanie da się trochę poprawić.

Zadanie 37

Udowodnijcie, że w klice o 9 wierzchołkach, której krawędzie pokolorowano dowolnie na dwa kolory znajdzie się 4 wierzchołki pomiędzy którymi krawędzie są w tym pierwszym z tych kolorów lub 3 wierzchołki pomiędzy którymi krawędzie są w drugim z tych kolorów.
Wskazówka: Zauważcie, że na przyjęciu o 9 osobach musi istnieć osoba, która zna parzyście wiele innych osób.

Zadanie 38

Udowodnijcie, że na imprezie 18-osobowej znajdą się 4 osoby, które wzajemnie się znają lub wzajemnie się nie znają.
Wskazówka: Skorzystajcie z poprzedniego zadania!

Zadanie 39

Udowodnijcie, że może sie zdarzyć impreza 17-osobowa na której nie ma takich 4 osób, które albo wzajemnie się wszystkie znają, albo wzajemnie się wszystkie nie znają. A zatem liczba Ramseya dla dwóch kolorów i $n = 4$ to 18.

Zadanie 40

Udowodnijcie następujące twierdzenie. Rozważmy zbiór przeliczalny X oraz zbiór $[X]^3$ wszystkich trzy-elementowych podzbiorów zbioru X. Każdy element zbioru $[X]^3$ pokolorowano na jeden ze skończonej liczby n kolorów. Istnieje wtedy taki nieskończony podzbiór $Y \subseteq X$, że każdy jego trzyelementowy podzbiór został pokolorowany na ten sam kolor.

7 Kombinatoryka nieskończona

Powiemy, że dwa zbiory nieskończone $A \subseteq \mathbb{N}$ oraz $B \subseteq \mathbb{N}$ są prawie rozłączne, jeśli $A \cap B$ jest zbiorem skończonym.

Zadanie 41

Udowodnijcie, że istnieje rodzina kontinuum wielu podzbiorów zbioru liczb naturalnych, które są parami prawie rozłączne.
Wskazówka: Jak wiadomo z zadania 15 skończone ciągi zer i jedynek można zakwaterować w hotelu

Hilberta, zatem każdemu ciągowi przypisany jest numer pokoju. Teraz weź nieskończony ciąg i przypisz mu zbiór wszystkich numerów pokojów, do których zakwaterowane są dowoly prefiks (skończony początek) tego nieskończonego ciągu.

Powiemy natomiast, że zbiór A prawie zawiera się w zbiorze B (ozn. $A \subseteq^* B$), jeśli $A \setminus B$ jest zbiorem skończonym. Natomiast nieskończony zbiór F nazwiemy pseudoprzecięciem rodziny zbiorów $\mathcal{A}$, jeśli jest o prawie zawarty w każdym ze zbiorów rodziny $\mathcal{A}$. W końcu powiemy, że rodzina $\mathcal{A}$ jest rodziną z własnością skończonego przecięcia, jeśli przecięcie dowolnej skończonej liczby zbiorów z rodziny $\mathcal{A}$ jest zbiorem nieskończonym.

Zadanie 42

Udowodnijcie, że każda rodzina przeliczalnie wielu podzbiorów zbioru liczb naturalnych, która ma własność skończonego przecięcia ma pseudoprzeciecie.

Powiemy też, że zbiór $X \subseteq \mathbb{N}$ rozcina zbiór $A \subseteq \mathbb{N}$, nie jest prawdą ani, że A się prawie zawiera w X, ani, że A się prawie zawiera w dopełnieniu $\mathbb{N} \setminus X$.

Zadanie 43

Udowodnijcie, że dla każdej rodziny $\mathcal{A}$ przeliczalnie wielu podzbiorów zbioru liczb naturalnych istnieje taki zbiór $A \subseteq \mathbb{N}$, którego nie rozcina żaden zbiór z rodziny $\mathcal{A}$.

Zadanie 44

Rozważmy klikę o przeliczalnie wiele wierzchołkach ponumerowanych liczbami narutalnymi. Nie $\mathcal{A}$ będzie rodziną nieskończonych podzbiorów zbioru $\mathbb{N}$ taką, że dla każdego kolorowania krawędzi kliki na dwa kolory istnieje zbiór X w tej rodzinie, o tej własności, że wszystkie krawędzie łączące pary wierzchołków odpowiadającym liczbom ze zbioru X są w tym samym kolorze. Udowodnij, że jeśli A jest dowolnym podzbiorem zbioru $\mathbb{N}$, to istnieje zbiór X w rodzinie $\mathcal{A}$, którego A nie rozcina.

Wskazówka: Stwórz kolorowanie na podstawie zbioru A. Pokoloruj na czerwono każdą krawędź łączącą dwie liczby ze zbioru A lub łączącą dwie liczby, które nie są w A, a na niebiesko każdą inną krawędź.

8 Aksjomaty podstaw matematyki

Matematykę i jej pojęcia (liczby, funkcje, przestrzenie...) można zbudować wychodząc od pierwotnego pojęcia, jakim jest zbiór. Dlatego aksjomaty opisujące właśnie zbiory (sformułowane przez E. Zermela i A. Fraenkela) możemy uznać, za aksjomaty stojące u podstawy matematyki. Chcieliśmy zatem przybliżyć Wam chociaż część z nich – skoro już o aksjomatach rozmawiamy.

Jednak uwaga na początek: w tym rozdziale (a nawet bardziej ogólnie jak się okaże) wszystko jest zbiorem. W szczególności elementy zbioru to też pewne zbiory – i tak czasem warto o nich myśleć. Oznaczenie $a \in b$ oznacza, że a jest elementem zbioru b.

0. Aksjomat zbioru pustego. Istnieje zbiór (zwany zbiorem pustym i oznaczany $\varnothing$), który nie ma żadnego elementu (dla każdego x, $x \notin \varnothing$).

1. Aksjomat ekstencjonalności. Dwa zbiory są równe wtedy i tylko wtedy, gdy mają dokładnie te same elementy ($A = B$ wtedy i tylko wtedy gdy dla każdego x, $x \in A$ wtedy i tylko wtedy, gdy $x \in B$).

2. Aksjomat pary. Dla każdych a, b istnieje zbiór, do którego należy a i b, a nie należy nic innego (zbiór ten oznaczamy $\{a, b\}$).

Zatrzymajmy się na chwilę, aby pokazać, że dla każdego a istnieje zbiór, do którego należy tylko a i nic więcej (nazywany singletonem a i oznaczany $\{a\}$). Rzeczywiście, trzeba zastosować aksjomat pary dla $a = b$ i już!

Zauważcie też, że dla każdych a, b, $\{a, b\} = \{b, a\}$ (na podstawie aksjomatu ekstencjonalności). Ale możemy zdefiniować specjalny zbiór zwany parą uporządkowaną, który „pamięta", co jest pierwsze. Dla dowolnych a, b niech $\langle a, b\rangle = \{a, \{a, b\}\}$ (czyli para z dwoma elementami: a oraz parą $\{a, b\}$).

Zadanie 45

Udowodnij, że dla dowolnych a, b, c, d zachodzi $\langle a, b\rangle = \langle c, d\rangle$ wtedy i tylko wtedy, gdy $a = c$ oraz $b = d$.

Dodajmy jeszcze jeden aksjomat (a właściwie tzw. schemat aksjomatów). Dla każdego zdania $\varphi(x)$ (np. $\varphi(x)$ to może być zdanie „x jest niepusty", albo „x ma parzystą liczbę elementów", etc.) dodajemy aksjomat:

3. Schemat aksjomatu wyróżniania. Dla każdego zbioru istnieje zbiór złożony z tych jego elementów x, które spełniają zdanie $\varphi(x)$.

Ten aksjomat jest bardzo precyzyjnie dobrany. Istnieje bowiem pokusa, aby go trochę uogólnić pisząc, że dla każdego zdania $\varphi(x)$ istnieje zbiór złożony z wszystkich x, które spełniają $\varphi(x)$ (czyli nie ograniczać się tylko do elementów pewnego zbioru). Okazuje się jednak, że takie zdanie jest fałszywe!

Zadanie 46

Udowodnijcie, że teza, że dla każdego zdania $\varphi(x)$ istnieje zbiór złożony z wszystkich x, które spełniają $\varphi(x)$, jest fałszywa.

Wskazówka: Rozpatrzcie zdanie „$x \notin x$".

Rozważmy jeszcze jeden aksjomat:

4. Aksjomat nieskończoności. Istnieje zbiór X taki, że $\varnothing \in X$ oraz jeśli $x \in X$, to również zbiór, którego elementami są dokładnie wszystkich elementy x oraz sam x jest elementem X. Inaczej mówiąc istnieje zbiór o nieskończonej liczbie elementów.

Zastanówmy się przez chwilę dlaczego ten zbiór X rzeczywiście ma nieskończenie wiele elementów. Na pewno ma jeden element $\varnothing$. Skoro $\varnothing \in X$, to również zbiór, którego elementy to elementy zbioru pustego (nie ma) oraz sam zbiór pusty (dostajemy więc zbiór, którego jedynym elementem jest zbiór pusty, czyli $\{\varnothing\}$) jest w tym zbiorze. Skoro jednak $\{\varnothing\} \in X$, elementy to elementy $\{\varnothing\}$ (czyli $\varnothing$) oraz sam $\{\varnothing\}$ (dostajemy więc zbiór dwuelementowy: $\{\varnothing, \{\varnothing\}\}$) jest w tym zbiorze. I tak dalej. Tak się składa, że matematycy dokładnie tak, posługując się zbiorami definiują kolejne liczby naturalne:

- $0 = \varnothing$,
- $1 = \{\varnothing\} = \{0\} = 0 \cup \{0\}$,
- $2 = \{\varnothing, \{\varnothing\}\} = \{0, 1\} = 1 \cup \{1\}$,

- ...
- $n + 1 = \{0, \dots, n\} = n \cup \{n\}$,
- ...

Zadanie 47

Wypiszcie zgodnie z tą zasadą liczby 3 i 4.

Aksjomatów teorii zbiorów jest dużo więcej – jeśli chcesz poznać wszystkie wyszukaj w Internecie hasło `aksjomaty ZFC`.

9 Proponowane zadania domowe

Zadanie 48 (1 punkt)

Wypisz wszystkie elementy i podzbiory zbioru $\{\mathbb{N}, \{\mathbb{N}\}\}$.

Zadanie 49 (1 punkt)

Udowodnicie też, że dla dowolnych zbiorów A, B, zachodzi $A \cup B = A \vartriangle B \vartriangle (A \cap B)$

Zadanie 50 (1 punkt)

W jaki sposób do hotelu Hilberta zakwaterować wszystkie elementy zbioru $\mathbb{N} \cup \{\pi\}$, w taki sposób, żeby wszystkie pokoje były zajęte?

Zadanie 51 (1 punkt)

Udowodnij, że przedział otwarty $(0, 1)$ jest równoliczny z przedziałem $(2, 4)$.

Zadanie 52 (1 punkt)

Czy istnieje zbiór A, taki że $|P(A)| = |\mathbb{N}|$? Odpowiedź uzasadnij.
Wskazówka: Rozpatrz możliwe przypadki.

Zadanie 53 (1 punkt)

Ile wynosi liczba Ramseya dla $n = 2$ i dowolnego k?

Zadanie 54 (2 punkty)

Zaproponuj podział zbioru liczb naturalnych na nieskończenie wiele nieskończonych (parami rozłącznych) podzbiorów.

Zadanie 55 (2 punkty)

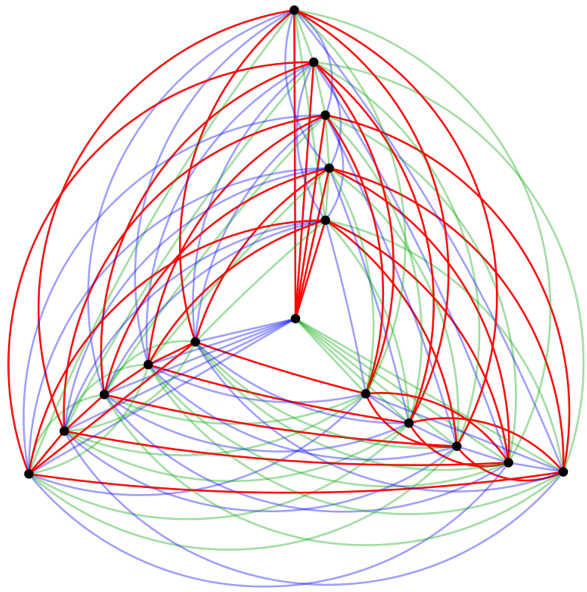
Udowodnij, że równoliczne są zbiory $A = (0, 1), B = (0, 1) \cup \mathbb{N}$ (gdzie $(0, 1)$ oznacza przedział liczb rzeczywistych pomiędzy 0 i 1 bez końców).

Zadanie 56 (2 punkty)

Sprawdź czy zbiór wszystkich skończonych podzbiorów zbioru liczb naturalnych jest przeliczalny.

Zadanie 57 (3 punkty)

Poniższy graf (rysunek za Wikipedią) jest kliką o 16 wierzchołkach pokolorowaną na 3 kolory, w której nie ma 3 wierzchołków krawędzie pomiędzy którymi są w tym samym kolorze.



Udowodnijcie, że jest to niemożliwe w klice o 17 wierzchołkach, czyli, że liczba Ramseya dla 3 kolorów i $n = 3$ jest równa 17.