Geometryczne liczby.
2. Równoliczność
materiały do ćwiczeń

Projekt „Matematyka dla ciekawych świata”
spisał: Michał Korch

24 luty 2020

1 Elementy i podzbiory

Na dzisiejszych zajęciach będziemy przede wszystkim zajmować się zbiorami. Zbiór jest w matematyce pojęciem pierwotnym, co oznacza, że każde inne matematyczne pojęcie można (w mniej, a z reguły bardziej) zawiły sposób zdefiniować używając pojęcia zbioru. Samo jednak pojęcie zbioru nie ma swojej ścisłej definicji, choć można opisać jego właściwości, zwane czasem aksjomatami – ale o tym jeszcze za chwilę.

W każdym razie, wszyscy prawdopodobnie mają pojęcie, co to zbiór. Zbiory mają elementy. To jest ich kluczowa cecha. Do tego stopnia, że powiemy, że jeśli badamy zbiór A oraz zbiór B i okaże się, że mają te same elementy (czyli każdy element jest w zbiorze A wtedy i tylko wtedy, gdy jest w zbiorze B), to powiemy, że zbiory A i B są równe. Oczywiście z tego w szczególności wynika, że $\{0,0\}$ oraz $\{0\}$ to opisy jednego i tego samego zbioru. Podobnie $\{0,1\}$ oraz $\{1,0\}$.

Natomiast podzbiorem danego zbioru nazywamy zbiór do którego należą tylko i wyłącznie niektóre (ale być może wszystkie albo żaden) elementy tego zbioru. Czyli, jeśli $A = \{1,2,3\}$, to zarówno $\{1,2\}$ jest podzbiorem $\{1,2,3\}$, ale również na przykład, $\varnothing$ jest też podzbiorem $\{1,2,3\}$.

Zadanie 1

Wskażcie wszystkie elementy i podzbiory zbioru $\{0,1,2,3\}$.

Bardzo często (a może nawet, jak się okaże, zawsze) w matematyce elementami zbiorów są inne zbiory. Oto taki, być może dziwnawy na pierwszy rzut oka zbiór. Rozszyfrujmy go, wskazując w nim wszystkie elementy i wszystkie podzbiory!

Zadanie 2

Wskażcie wszystkie elementy i podzbiory zbioru $\{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}\}$,

2 Operacje na zbiorach

Zbiory można ze sobą sumować. Suma zbiorów A i B, czyli $A \cup B$ to zbiór, do którego należą wszystkie elementy, które są w A lub w B. Natomiast przecięcie (inaczej, część wspólna lub iloczyn) zbiorów w A i B to zbiór $A \cap B$, do którego należą wszystkie elementy będące jednocześnie w A i w B. No i w końcu różnica zbiorów A i B, czyli $A \setminus B$, to zbiór tych elementów, które są w A, a nie są w B, zaś różnica symetryczna $A \triangle B$ to zbiór tych elementów, które są w jednym ze zbiorów A lub B, ale nie w obu.

Zadanie 3

Naszkicujcie na układzie współrzędnych zbiory $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$ oraz $A \triangle B$, jeśli A to zbiór wszystkich punktów na płaszczyźnie o współrzędnych (x, y) spełniających warunek $|x| + |y| \leq 1$, zaś B to zbiór wszystkich punktów na płaszczyźnie o współrzędnych (x, y), spełniających warunek $(x-1)^2 + (y-1)^2 < 1$.
Wskazówka: Wskazówkę do tego zadania znajdziecie na końcu tego skryptu.

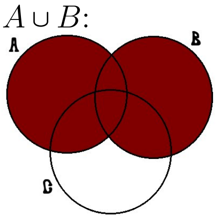
Zadanie 4

Wskażcie wszystkie elementy i podzbiory zbioru $\{\emptyset, \{\{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\} \setminus \{\emptyset\}, \{\emptyset\} \cap \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$.
Wskazówka: Pamiętajcie, że np. $\{0, 0\} = \{0\}$.

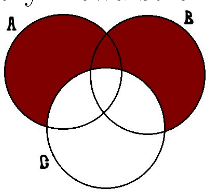
Można też z łatwością zauważyć, że czasem niezależnie od tego jakie weźmiemy zbiory, pewne operacje prowadzą do tego samego. Na przykład, niezależnie od tego, czym są zbiory A, B oraz C, zawsze: $(A \cup B) \setminus C = (A \setminus C) \cup (B \setminus C)$.

Jak to udowodnić? Można to zrobić jedną z trzech metod. Można całą sytuację narysować. Takie rysunki nazywają się diagramami Venna:

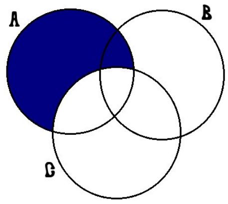
Rozważamy lewą stronę: $A \cup B$:



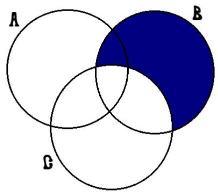
czyli lewa strona to:



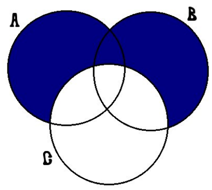
Patrzymy na prawą: $A \setminus C$:



$B \setminus C$:



czyli prawa strona to:



Zgadza się. □

Alternatywnie, można sprawdzić, że to prawda w przypadku tzw. rodziny niezależnej. Jest to taki zestaw zbiorów A, B, C, który ma tę własność, że w każdym polu diagramu Venna jest co najmniej jeden element. Na przykład, możemy wziąć elementy $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$, w stworzyć z nich rodzinę niezależną. $A = \{1, 2, 3, 4\}, B = \{2, 4, 5, 6\}, C = \{3, 4, 6, 7\}$. Jest to rodzina niezależna, co łatwo, choć żmudnie, można sprawdzić. Jeśli sprawdzana równość $(A \cup B) \setminus C = (A \setminus C) \cup (B \setminus C)$ jest prawdziwa w przypadku rodziny niezależnej, będzie prawdziwa zawsze.

Zatem obliczamy lewą stronę: $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}, (A \cup B) \setminus C = \{1, 2, 5\}$ i prawą: $A \setminus C = \{1, 2\}, B \setminus C = \{2, 5\}, (A \setminus C) \cup (B \setminus C) = \{1, 2, 5\}$, zgadza się. □

W końcu trzecia metoda, to przeprowadzenie pełnego dowodu, to znaczy sprawdzenie, że jeśli jakiś element należy do lewej strony, to należy też do prawej, a jeśli należy do lewej, to

również należy do prawe. A potem na odwrót, że jeśli należy do prawej, to również należy do lewej. Do dzieła. Niech $x \in (A \cup B) \setminus C$, wtedy $x \in A \cup B$ oraz $x \notin C$, a zatem $x \in A$ lub $x \in B$, ale $x \notin C$, czyli $(x \in A \wedge x \notin C) \vee (x \in B \wedge x \notin C)$, czyli $x \in A \setminus C$ lub $x \in B \setminus C$, zatem $x \in (A \setminus C) \cup (B \setminus C)$.
W drugą stronę, niech teraz $x \in (A \setminus C) \cup (B \setminus C)$, zatem $x \in A \setminus C$ lub $x \in B \setminus C$, a zatem $x \in A$ lub $x \in B$, ale w obu wypadkach pod warunkiem, że $x \notin C$. Zatem $x \in A \cup B$, ale $x \notin C$, zatem $x \in (A \cup B) \setminus C$. $\square$

Zadanie 5

Udowodnicie zatem, że dla dowolnych zbiorów A, B, C, zachodzi $A \cap (B \triangle C) = (A \cap B) \triangle (A \cap C)$.

3 Hotel Hilberta

Wykonując myślowy eksperyment z hotelem Hilberta, ustawialiśmy w pary nieskończenie wiele jednoosobowych pokoi hotelu ponumerowanych liczbami naturalnymi (poczynając od zera) w pary z elementami zbioru gości. Zastanawialiśmy się nad zakwaterowaniem nowego gościa (nazwijmy go gościem -1) w sytuacji, w której wszystkie nieskończenie wiele pokoi jest zajętych (nazwijmy gościa, który jest w pokoju numer n, gościem n). Okazało się, że nowego gościa możemy dokwaterować mimo zajętości wszystkich pokoi, przesuwając każdego z dotychczasowych gości do pokoju o numerze o jeden większym. Wtedy pokój zerowy będzie pusty i możemy tam zakwaterować gościa -1. Rzeczywiście przyporządkowaliśmy w pary elementy zbioru gości $\{-1, 0, 1, 2, \ldots\} = \{-1\} \cup \mathbb{N}$ z elementami zbioru pokoi $\{0, 1, 2, 3, \ldots\} = \mathbb{N}$, przyporządkowując gościowi n pokój o numerze $n+1$. Inaczej mówiąc, dowiedliśmy, że zbiory $\{-1\} \cup \mathbb{N}$ oraz $\mathbb{N}$ są równoliczne, co zapisujemy $|\mathbb{N} \cup \{-1\}| = |\mathbb{N}|$.

Zadanie 6

W jaki sposób do hotelu Hilberta zakwaterować wszystkie elementy zbioru $\mathbb{N} \setminus \{2020\}$, ale w taki sposób, żeby wszystkie pokoje były zajęte?

Zadanie 7

To przeprowadźmy jeszcze jeden eksperyment myślowy z tym hotelem. Załóżmy, że do pustego hotelu zgłaszają się do niego nieskończona grupa kobiet i nieskończona grupa mężczyzn. Jeśli recepcjonista jest dobrze wychowany, prawdopodobnie wpuści do hotelu najpierw kobiety. Ale niestety jeśli tak zrobi i nie pomyśli – zajmą one wszystkie nieskończenie wiele pokoi i nieskończona grupa mężczyzn zostanie na lodzie. Czy można postąpić inaczej? A jeśli tak, to czy z tego wynika (jeśli tak, to w jaki sposób) że zbiory liczb naturalnych i całkowitych są równoliczne?

4 Równoliczność

Zbiory A i B są równoliczne (co oznaczane jest jako $|A| = |B|$), jeśli elementy zbioru A można ustawić w pary ze wszystkimi elementami zbioru B, tak że każdy z elementów jest w dokładnie jednej parze.

Zadanie 8

Udowodnijcie, że przedział otwarty $(0,1)$ jest równoliczny ze zbiorem wszystkich liczb rzeczywistych.

Zadanie 9

Udowodnijcie zatem, że przedział domknięty $[0,1]$ jest równoliczny ze zbiorem wszystkich liczb rzeczywistych.
Wskazówka: Pomyślcie, jak w tym przedziale „zanurzyć” hotel Hilberta, a następnie przesuńcie gości o dwa pokoje.

5 Aksjomaty podstaw matematyki

Matematykę i jej pojęcia (liczby, funkcje, przestrzenie. . .) można zbudować wychodząc od pierwotnego pojęcia, jakim jest zbiór. Dlatego aksjomaty opisujące właśnie zbiory (sformułowane przez E. Zermela i A. Fraenkela) możemy uznać, za aksjomaty stojące u podstawy matematyki. Chcieliśmy zatem przybliżyć Wam chociaż część z nich – skoro już o aksjomatach rozmawiamy.

Jednak uwaga na początek: w tym rozdziale (a nawet bardziej ogólnie jak się okaże) wszystko jest zbiorem. W szczególności elementy zbioru to też pewne zbiory – i tak czasem warto o nich myśleć. Oznaczenie $a \in b$ oznacza, że a jest elementem zbioru b.

0. Aksjomat zbioru pustego. Istnieje zbiór (zwany zbiorem pustym i oznaczany $\varnothing$), który nie ma żadnego elementu (dla każdego x, $x \notin \varnothing$).

1. Aksjomat ekstencjonalności. Dwa zbiory są równe wtedy i tylko wtedy, gdy mają dokładnie te same elementy ($A = B$ wtedy i tylko wtedy gdy dla każdego x, $x \in A$ wtedy i tylko wtedy, gdy $x \in B$).

2. Aksjomat pary. Dla każdych a, b istnieje zbiór, do którego należy a i b, a nie należy nic innego (zbiór ten oznaczamy $\{a, b\}$).

Zatrzymajmy się na chwilę, aby pokazać, że dla każdego a istnieje zbiór, do którego należy tylko a i nic więcej (nazywany singletonem a i oznaczany $\{a\}$). Rzeczywiście, trzeba zastosować aksjomat pary dla $a = b$ i już!

Zauważcie też, że dla każdych a, b, $\{a, b\} = \{b, a\}$ (na podstawie aksjomatu ekstencjonalności). Ale możemy zdefiniować specjalny zbiór zwany parą uporządkowaną, który „pamięta”, co jest pierwsze. Dla dowolnych a, b niech $\langle a, b\rangle = \{a, \{a, b\}\}$ (czyli para z dwoma elementami: a oraz parą $\{a, b\}$).

Zadanie 10

Udowodnij, że dla dowolnych a, b, c, d zachodzi $\langle a, b\rangle = \langle c, d\rangle$ wtedy i tylko wtedy, gdy $a = c$ oraz $b = d$.

Dodajmy jeszcze jeden aksjomat. A właściwie tzw. schemat aksjomatów. Dla każdego zdania $\varphi(x)$ (np. $\varphi(x)$ to może być zdanie „x jest niepusty”, albo „x ma parzystą liczbę elementów”, etc.) dodajmy aksjomat:

3. Schemat aksjomatu wyróżniania. Dla każdego zbioru istnieje zbiór złożony z tych jego elementów x, które spełniają zdanie $\varphi(x)$.

Ten aksjomat jest bardzo precyzyjnie dobrany. Istnieje bowiem pokusa, aby go trochę uogólnić pisząc, że dla każdego zdania $\varphi(x)$ istnieje zbiór złożony z wszystkich x, które spełniają $\varphi(x)$ (czyli nie ograniczać się tylko do elementów pewnego zbioru). Okazuje się jednak, że takie zdanie jest fałszywe!

Zadanie 11

Udowodnijcie, że teza, że dla każdego zdania $\varphi(x)$ istnieje zbiór złożony z wszystkich x, które spełniają $\varphi(x)$, jest fałszywa.
Wskazówka: Rozpatrzcie zdanie „$x \notin x$”.

Rozważmy zatem jeszcze jeden aksjomat.

4. Aksjomat nieskończoności. Istnieje zbiór X taki, że $\varnothing \in X$ oraz jeśli $x \in X$, to również zbiór, którego elementami są dokładnie wszystkich elementy x oraz sam x jest elementem X. Inaczej mówiąc istnieje zbiór o nieskończonej liczbie elementów.

Zastanówmy się przez chwilę dlaczego ten zbiór X rzeczywiście ma nieskończenie wiele elementów. Na pewno ma jeden element $\varnothing$. Skoro $\varnothing \in X$, to również zbiór, którego elementy to elementy zbioru pustego (nie ma) oraz sam zbiór pusty (dostajemy więc zbiór, którego jedynym elementem jest zbiór pusty, czyli $\{\varnothing\}$) jest w tym zbiorze. Skoro jednak $\{\varnothing\} \in X$, elementy to elementy $\{\varnothing\}$ (czyli $\varnothing$) oraz sam $\{\varnothing\}$ (dostajemy więc zbiór dwuelementowy: $\{\varnothing, \{\varnothing\}\}$) jest w tym zbiorze. I tak dalej. Tak się składa, że matematycy dokładnie tak, posługując się zbiorami definiują kolejne liczby naturalne:

- $0 = \varnothing$,
- $1 = \{\varnothing\}$,
- $2 = \{\varnothing, \{\varnothing\}\}$,
- ...

Zadanie 12

Wypiszcie zgodnie z tą zasadą liczby 3 i 4!

Aksjomatów teorii zbiorów jest dużo więcej – jeśli chcesz poznać wszystkie wyszukaj w Internecie aksjomatów ZFC.

6 Zadania dodatkowe

Zadanie 13

Wypiszcie wszystkie elementy i podzbiory zbioru $\{\varnothing, \mathbb{N}, \{0\}, 8\}$.

Zadanie 14

Prawdopodobnie zauważyliście pewną prawidłowość dotyczącą tego ile jest podzbiorów skończonego zbioru n-elementowego. Sformułujcie ją i uzasadnijcie.

Zadanie 15

Udowodnicie, że dla dowolnych zbiorów A i B, zachodzi $A \cup B = A \triangle B \triangle (A \cap B)$

Zadanie 16

Czy prawdą jest, że dla dowolnych zbiorów A, B zachodzi równość $(A \setminus B) \cup B = A$?

Zadanie 17

Czy prawdą jest, że dla dowolnych zbiorów A, B następujące stwierdzenie jest prawdziwe: jeśli $|A| = |B|$, to $|A \setminus B| = |B \setminus A|$? Odpowiedź uzasadnijcie!

Zadanie 18

Czy prawdą jest, że dla dowolnych zbiorów A, B następujące stwierdzenie jest prawdziwe: jeśli $|A \setminus B| = |B \setminus A|$, to $|A| = |B|$? Odpowiedź uzasadnijcie!

7 Proponowane zadania domowe

Zadanie 19 (1 punkt)

Wypisz wszystkie elementy i podzbiory zbioru $\{\mathbb{N}, \{\mathbb{N}\}\}$.

Zadanie 20 (2 punkty)

Zaproponuj podział zbioru liczb naturalnych na nieskończenie wiele nieskończonych (parami rozłącznych) podzbiorów.

Zadanie 21 (3 punkty)

Udowodnij, że równoliczne są zbiory $A = (0,1), B = (0,1) \cup \mathbb{N}$ (gdzie $(0,1)$ oznacza przedział liczb całkowitych pomiędzy 0 i 1 bez końców).

8 Wskazówki do zadań

Zadanie 3

Zauważ, że zbiór A to kwadrat o wierzchołkach $(1,0), (0,1), (-1,0), (0,-1)$, zaś zbiór B to koło o środku w punkcie $(1,1)$ i promieniu 1. Dlaczego tak jest?