1 Uwagi do zajęć

Były dwa zadania, których nie ma w skrypcie, a którym poświęciliśmy czas na zajęciach. Tu są rozwiązania (na wypadek, gdyby miały się przydać w pracy domowej lub gdybym zrobił błąd na tablicy):

Złota proporcja

Chcemy złamać patyk (podzielić odcinek) w takim miejscu, żeby stosunek długości dłuższego patyczka do krótszego był taki sam, jak patyka (przed złamaniem), do dłuższego patyczka.

Niech a i b to długości odpowiednio krótszego i dłuższego patyczka. Wtedy długość całego patyka to $a+b$. Chcemy znaleźć takie ich wartości, żeby spełnione było równanie:

$$\frac{a}{b} = \frac{a+b}{b}$$

Gdybyśmy wiedzieli, jak złamać patyczek ustalonej długości $a+b$, to dłuższe i krótsze też potrafimy dobrze złamać — gdy patyk ma długość ℓ, to łamiąc go na patyczki długości ℓa i ℓb analogiczne równanie dla dłuższego patyka będzie spełnione[1]. W takim razie możemy zająć się tylko patykiem długości 1.

Jak patyk miał długość 1, a dłuższy patyczek ma długość x, to krótszy ma długość $1-x$. Dostajemy do rozwiązania równanie kwadratowe:

$$\begin{aligned} \frac{x}{1-x} &= \frac{1}{x} && // \cdot x(1-x) \\ x^2 &= 1-x && // -1+x \\ x^2+x-1 &= 0 \end{aligned}$$

Otrzymaliśpy równanie kwadratowe, które ma dwa rozwiązania. Jedno z nich jest ujemne, więc nie nadaje się na długość odcinka. Stąd dostajemy, że dłuższy patyczek ma mieć długość $x = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$. Więc złota proporcja to stosunek długości dwóch patyczków, czyli:

$$\varphi = \frac{x}{1-x} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

Kolejne zadanie jest istotne z dwóch powodów. Po pierwsze: jest podobne zadanie domowe.

Po drugie: jest to jedno z dwóch zadań, które zrobiliśmy w dość specyficzny sposób (kolejnym był dowód, że jest nieskończenie wiele liczb pierwszych). Założyliśmy najpierw, że to, co chcemy pokazać jest nieprawdą. Z takiego założenia otrzymaliśmy, że jednocześnie prawdziwe musiałby być dwa sprzeczne ze sobą zdania. Z tego wywnioskowaliśmy, że cośmy założyli na początku nie może być prawdą.

Niewymierność

Pokazać, że liczba φ jest niewymierna.

Niech $\sqrt{2}+\sqrt{3} = \frac{p}{q}$ i p/q będzie ułamkiem nieskracalnym. Wtedy:

$$\begin{aligned} \frac{1+\sqrt{5}}{2} &= \frac{p}{q} && // \cdot 2q \\ q+\sqrt{5}q &= 2p && // -q \\ \sqrt{5}q &= 2p-q && //()^2 \\ 5q^2 &= 4p^2-4pq+q^2 && // -q^2 \\ q^2 &= p\,(p-q) \end{aligned}$$

Skupmy się teraz na tej postaci równania na p i q. Jeżeli jakaś liczba pierwsza dzieli r dzieli licznik p — $\varphi > 1$ więc na pewno licznik musi być większy od 1 — to ta sama liczba r dzieli q^2, a więc również q (dlatego, że r jest pierwsza). Ale w takim razie ułamek p/q da się skrócić przez r, a przecież miał być nieskracalny.

W takim razie wartość złotej proporcji nie może być wymierna.

[1] Można tak samo napisać takie równanie: jak patyczki mają długości ℓa i ℓb, to patyk ma długość $\ell(a+b)$; w równaniu ℓ skraca się tak, że nie pozostaje po nim śladu. Nieco lepiej będziemy mogli to zrozumieć, gdy dojdziemy do zadań z geometrii i twierdzenia Talesa.

2 Zadania domowe

Termin oddania zadań to kolejne ćwiczenia z matematyki, czyli 09.03 — na zajęciach za tydzień będziemy w laboratorium komputerowym. Wszystkie, zbieram **w formie pisemnej**.

Zadanie D1.1 [1 pkt.]

To zadanie 19. ze skryptu (tych karteczek, które dostaliście). Jest długie i ma obrazki, więc nie ma sensu, żeby je przepisywał. Warto podkreślić, że obrazki w wersji elektronicznej możecie znaleźć na stronie z materiałami.

Na każdym obrazku postaraj się znaleźć przynajmniej jedną; ogólnie im więcej tym lepiej.

Zadanie D1.2 [1 pkt.]

Poniżej masz wypisanych kilka japońskich liczebników z ich odpowiednikami zapisanymi po naszemu. Zapisz przy ich pomocy brakujące liczby w tabelce i opiszcie, jak działa ten system liczenia.

1	一	11	十一	1 410	千四百十
2	二	12		10 000	一万
3	三	15	十五	11 410	一万千四百十
4	四	20	二十	24 000	
5	五	40	四十	240 000	二十四万
6	六	48		1 640 100	
7	七	95	九十五	10 000 000	一千万
8	八	100	百	20 000 000	二千万
9	九	142	百四十二	20 400 600	
10	十	1 000	千	99 999 999	九千九百九十九万九千九百九十九

Zadanie D1.3 [2 pkt.]

Za jeden punkt: udowodnij, że liczba $\frac{\sqrt{3}}{2}$ jest niewymierna; za dwa punkty: to samo, ale dla liczby $\sqrt{2}+\sqrt{3}$.

Zadanie D1.4 [2 pkt.]

To zadanie 12. ze skryptu — urocza zagadka, nad którą można się zastanawiać na przykład jadąc autobusem/tramwajem/pociągiem do szkoły (trzeba tylko czasem wyjrzeć za okno, żeby nie przegapić właściwego przystanku). Można korzystać ze wskazówki na końcu skryptu. Herszt też jest piratem, a więc również bierze udział w głosowaniu.