Kombinowanie o nieskończoności.
2. Wyspy, mosty, mapy i kredki
materiały do ćwiczeń

Projekt „Matematyka dla ciekawych świata”

spisał: Michał Korch

15 marzec 2018

Szybkie przypomnienie z wykładu

Prezentacja multimedialna do wykładu.

Wykład 2. Wyspy i mosty

Cykle i ścieżki Eulera

Ścieżka Eulera to droga (to jest ciąg sąsiadujących krawędzi) w grafie, która przechodzi przez każdą krawędź dokładnie raz. Cykl to ścieżka, która kończy się w tym samym wierzchołku, co się zaczyna (czyli droga zaczynająca i kończąca się w tym samym wierzchołku, ale przechodząca przez każdą krawędź grafu dokładnie raz).

Stopień wierzchołka to liczba krawędzi, które z niego wychodzą. Co więcej, umówmy się, że w szczególnym przypadku, jeśli jakiś wierzchołek ma pętlę (krawędź z wierzchołka do niego samego), to krawędź ta wlicza się do jego stopnia jako dwa (czyli liczymy „końce” krawędzi).

Udowodniliśmy twierdzenie Eulera, które mówi, że w grafie jest cykl Eulera wtedy i tylko wtedy, gdy wszystkie jego wierzchołki mają parzysty stopień. W grafie jest ścieżka Eulera wtedy i tylko wtedy, gdy dokładnie zero lub dwa wierzchołki mają nieparzysty stopień.

Cykle i ścieżki Hamiltona

Sytuacja jest bardziej skomplikowana, gdy rozważymy ścieżki i cykle Hamiltona, czyli odpowiednio ścieżki i cykle, które przechodzą przez każdy wierzchołek dokładnie raz.

Nie znamy algorytmu, który potrafiłby poradzić sobie ze stwierdzeniem, czy w grafie jest cykl Hamiltona, w czasie wielomianowym. Co więcej jest to problem NP-zupełny, czyli jeśli da się znaleźć taki algorytm, to wszystkie problemy weryfikowalne w czasie wielomianowym, da się rozwiązać w czasie wielomianowym.

Grafy planarne

Graf jest planarny, jeśli można go narysować na płaszczyźnie tak, żeby krawędzie się nie przecinały.

Graf jest prosty, jeśli nie ma multikrawędzi (każde dwa wierzchołki łączy co najwyżej jedna krawędź) oraz nie ma pętli (krawędzi które łączą wierzchołek z nim samym).

Kliką nazywamy graf prosty, w którym każde dwa wierzchołki są połączone krawędzią. Klikę o n wierzchołkach oznaczamy K_n.

Graf jest dwudzielny, jeśli zbiór wszystkich wierzchołków można podzielić na dwa zbiory A i B, takie że żadne dwa wierzchołki należące do A nie są połączone krawędzią, oraz żadne dwa wierzchołki należące do B nie są połączone krawędzią. Graf dwudzielny jest pełny, jeśli poza tym każdy wierzchołek z A jest połączony z każdym wierzchołkiem z B dokładnie jedną krawędzią. Pełny graf dwudzielny oznaczamy $K_{n,m}$, gdzie n to liczba elementów w zbiorze A, natomiast m to liczba elementów w zbiorze B.

K_5 oraz $K_{3,3}$ to standardowe przykłady grafów nieplanarnych. Co więcej, twierdzenie Kuratowskiego stanowi, że graf jest nieplanarny wtedy i tylko wtedy, gdy można w nim „znaleźć" K_5 lub $K_{3,3}$.

Wzór Eulera

Udowodniliśmy, że dla każdego spójnego (czyli takiego, że pomiędzy każdymi dwoma wierzchołkami istnieje droga) grafu planarnego zachodzi

$$w - k + s = 2,$$

gdzie w to liczba jego wierzchołków, k to liczba jego krawędzi, a s to liczba jego ścian. Ściany to elementy, na które rozpadłaby się płaszczyzna, gdybyśmy przecięli ją wzdłuż krawędzi grafu. Czyli w szczególności liczymy też obszar „na zewnątrz" grafu jako ścianę.

Wykład 3. Mapy i kredki

Kolorowanie map

Zagadnienie kolorowania map to pytanie ile kolorów potrzeba, by pokolorować mapę tak, żeby kraje sąsiadujące (odcinkiem granicy, a nie tylko punktem) były różnych kolorów. To zadanie odpowiada zadaniu polegającym na znalezieniu liczby kolorów potrzebnych do pokolorowania grafu planarnego tak, żeby każde dwa wierzchołki połączone krawędzią były różnych kolorów.

Łatwo udowodnić, że wystarczy 6 kolorów. Nieco trudniej udowodnić, że wystarczy 5 kolorów. Tak naprawdę wystarczą 4 kolory, ale fakt ten przez długo był pytaniem otwartym. Dowód skonstruowano dopiero w drugiej połowie XX wieku, i wymagał rozważenie ponad 2000 przypadków, co było możliwe tylko przy użyciu komputera.

Twierdzenie Ramseya

(Skończone) twierdzenie Ramseya stanowi, że mając dane k kolorów oraz liczbę m, istnieje takie n, że jeśli pokoloruję krawędzie K_n w dowolny sposób k kolorami, to znajdę m wierzchołków, że wszystkie krawędzie pomiędzy nimi są pokolorowane na ten sam kolor (czyli takie, że K_m im odpowiadająca jest cała w jednym kolorze).

1 Zadania łatwe

1. Udowodnij, następujący fakt zwany twierdzeniem o uściskach rąk. W każdym grafie liczba wierzchołków nieparzystego stopnia musi być parzysta.

Wskazówka: Każda krawędź ma dwa końce. Zatem suma stopni wszystkich wierzchołków musi być parzysta.

2. Drzewem nazywamy spójny graf, w którym nie ma cykli. Narysuj wszystkie możliwe drzewa:

    a) o trzech wierzchołkach,

    b) o czterech wierzchołkach,

    c) o pięciu wierzchołkach,
    Wskazówka: Różnych drzew o pięciu wierzchołkach jest trzy.

    d) o sześciu wierzchołkach.

3. Ile jest krawędzi w klice o 5 wierzchołkach? Ile w klice o 6 wierzchołkach?

4. Podaj przykład grafu z wierzchołkami x, y i z, mającego wszystkie 3 następujące własności:

    - istnieje cykl przechodzący przez wierzchołki x i y,
    - istnieje cykl przechodzący przez wierzchołki y i z,
    - nie ma cykli przechodzących przez x i z.

5. Narysuj mapę, której nie da się pokolorować trzema kolorami tak, żeby kraje sąsiadujące (odcinkiem granicy, a nie tylko punktem) były różnych kolorów.

6. Zrób rysunki wszystkich czternastu grafów o trzech wierzchołkach i trzech krawędziach.

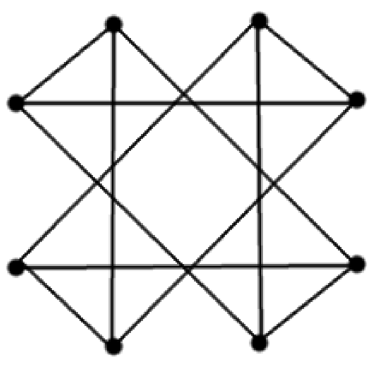
7. Zrób rysunki wszystkich prostych grafów (bez krawędzi wielokrotnych i pętli) o czterech wierzchołkach i czterech krawędziach.

8. Graf nazywamy regularnym, jeśli stopnie wszystkich jego wierzchołków są sobie równe. Które grafy z narysowanych w poprzednich dwóch zadaniach są regularne?

9. Zrób rysunki wszystkich pięciu grafów regularnych o czterech wierzchołkach, z których każdy na stopień 2.

10. Zrób rysunki wszystkich prostych grafów regularnych o czterech wierzchołkach, z których każdy na stopień 3.

11. Rozstrzygnij, czy poniższy graf jest planarny?



12. Rozstrzygnij, czy powyższy graf ma ścieżkę Eulera.

13. Rozstrzygnij, czy grafy $K_{3,3}, K_5, K_{4,4,}, K_6$ mają ścieżkę Eulera.

14. Czy jest możliwe, aby owad poruszający się po krawędziach sześcianu przeszedł

    (a) każdą krawędź dokładnie raz?

    (b) każdy wierzchołek dokładnie raz?

15. Znajdź przykłady grafu, który:

    a) ma zarówno cykl Eulera, jak i cykl Hamiltona,

    b) ma cykl Eulera, ale nie ma cyklu Hamiltona,

    c) ma cykl Hamiltona, ale nie ma cyklu Eulera,

    d) nie ma ani cyklu Eulera, ani cyklu Hamiltona.

16. Udowodnij, że graf można pokolorować dwoma kolorami (kolorujemy wierzchołki, tak że żadne dwa wierzchołki połączone krawędzią nie są tego samego koloru) wtedy i tylko wtedy, gdy jest dwudzielny.

17. Podaj przykład grafu (z racji rzeczy nieplanarnego), o stopniach wierzchołków mniejszej lub równej 7, który nie da się pokolorować mniej niż 8 kolorami.

2 Zadania trochę mniej łatwe niż łatwe

1. Załóżmy, że sala muzeum ma kształt wielokąta (w tym zadaniu będziemy rozważać wielokąty, które nie są wypukłe). Dyrektor muzeum musi ustawić w sali tylu (nieruchomych) strażników, zaby każdy jej punkt był w zasięgu wzroku chociaż jednego z nich. Znajdź przykład takiego wielokąta o 12 ścianach, że do jego pilnowania potrzeba aż 4 strażników. Ogólniej, zaproponuj, jak znaleźć wielokąt o $3k$ ścianach, że do jego pilnowania potrzeba aż k strażników.
   Wskazówka: Zastanów się nad wielokątami kształtem przypominającymi grzebień.

2. Ile jest krawędzi w klice o n wierzchołkach? (patrz też zadanie 3 z zadań łatwych).

3. Rozważmy graf K_8. Ile jest w nim podgrafów takich samych, jak K_5?

4. Ile ścian może mieć wielościan wypukły o n wierzchołkach i m krawędziach?
   Wskazówka: Przerób go na graf i zastosuj wzór Eulera.

5. Pokaż, że jeśli graf planarny nie zawiera trójkątów oraz ma co najmniej 3 wierzchołki, to $k \le 2w - 4$, gdzie k to liczba krawędzi w grafie, a w to liczba wierzchołków w grafie.

6. Pokaż, że w każdym prostym grafie planarnym $k \le 3w - 6$, gdzie k to liczba krawędzi w grafie, a w to liczba wierzchołków w grafie.
   Wskazówka: Zauważ, zliczając krawędzie wokół ścian, że $2k \ge 3s$, gdzie s to liczba ścian.

7. Udowodnij, że jeśli prosty graf jest planarny, to istnieje w nim wierzchołek stopnia co najwyżej 5.
   Wskazówka: Załóż przeciwnie, że wszystkie wierzchołki mają stopień co najmniej 6 i wykaż, że to daje sprzeczność z wynikiem poprzedniego zadania.

3 Zadania trudniejsze

1. Udowodnij, że każdy graf, w którym każdy wierzchołek ma stopień co najmniej 2, zawiera cykl.
   Wskazówka: Dowód podobny do pierwszej części dowodu twierdzenia Eulera.

2. Udowodnij, że każdy graf o n wierzchołkach i co najmniej n krawędziach zawiera cykl.
   Wskazówka: Skorzystaj z poprzedniego zadania.

3. Niech będzie dany wielokąt. Dorysowujemy do niego niektóre przekątne, tak żeby podzielić go na trójkąty. Powstał w ten sposób graf, którego wierzchołki to wierzchołki wielokąta, a krawędzie to jego boki oraz dorysowane przekątne. Udowodnij, że wierzchołki takiego grafu można zawsze pokolorować trzema kolorami, tak że żadne dwa sąsiadujące wierzchołki nie są pokolorowane tym samym kolorem.
   Wskazówka: Jeśli ten wielokąt to trójkąt, to zadanie jest oczywiste. Jeśli nie, to zauważ podziel problem na dwa mniejsze, wybierając przekątną (zawsze dzieli wielokąt na dwa mniejsze) i następnie odpowiednio uzgadniając kolorowanie.

4. Załóżmy, że sala muzeum ma kształt wielokąta (w tym zadaniu będziemy rozważać wielokąty, które nie są wypukłe). Dyrektor muzeum musi ustawić w sali tylu (nieruchomych) strażników, zaby każdy jej punkt był w zasięgu wzroku chociaż jednego z nich (patrz też zadanie 1 z zadań trochę mniej łatwych niż łatwe). Udowodnij, że jeśli sala ma m boków zawsze wystarczy do jej pilnowania $\lfloor m/3 \rfloor$ (zaokrąglenie w dół) strażników.
   Wskazówka: Skorzystaj z poprzedniego zadania.

5. Zaprojektuj algorytm, który mając dany graf, w którym istnieje ścieżka Eulera, znajduje ją.
   Wskazówka: Należy zacząć od wierzchołka o nieparzystym stopniu, o ile taki istnieje. Za każdym razem wybierając wychodzącą krawędź z wierzchołka trzeba zadbać o to, żeby krawędzie, którymi przeszliśmy do tej pory nie rozspójniają grafu (żeby było czym wrócić).

6. Udowodnij, że graf jest dwudzielny wtedy i tylko wtedy gdy każdy cykl w nim jest parzystej długości.

7. Udowodnij, że jeśli n jest największym stopniem wierzchołka w pewnym grafie, to można go pokolorować (kolorujemy wierzchołki tak, że dwa wierzchołki połączone krawędzią nie są tego samego koloru) $n + 1$ kolorami.
   Wskazówka: Postępuj podobnie, jak w dowodzie twierdzenia o 6 *barwach.*

Zadania inspirowane: [2], [6], [8], [3], notatki i pomysły Michała Korcha.

Literatura dodatkowa

[1] Martin Aigner and Guenter Ziegler. *Dowody z Księgi.* PWN, Warszawa, 2002. rozdział 21, 22, 23, 24, 27, 28, 29, 30, 31.

[2] Wiktor Bartol and Witold Sadowski, editors. *O twierdzeniach i hipotezach. Matematyka według Delty.* Wydawnictwa UW, Warszawa, 2016. rozdziały 14 i 20.

[3] Bogdan Chlebus. Matematyka dyskretna – skrypt. rozdziały 10, 11, 12, 14, 15.

[4] Thomas Cormen, Charles Leiserson, and Ronald Rivest. *Wprowadzenie do algorytmów.* WNT, Warszawa, 1997. rozdział: 36.

[5] Richard Courant, Herbert Robbins, and Ian Stewart. *Co to jest matematyka?* Prószyński i S-ka, Warszawa, 1998. rozdział IX.6.

[6] Tony Crilly. *50 teorii matematyki.* PWN, Warszawa, 2009. rozdział: 29 u 30.

[7] Christos Papadimitriou. *Złożoność obliczeniowa.* WNT, Warszawa, 2002. rozdział: 9.3.

[8] Kenneth Ross and Charles Wrigth. *Matematyka dyskretna.* PWN, Warszawa, 1999. rozdziały 6 i 8.

[9] Paweł Strzelecki. *Matematyka współczesna dla myślących laików.* Wydawnictwa Uniwersytetu Warszawaskiego, Warszawa, 2015. rozdział 2.