Na tropach liczby π

5 października 2011

Co to jest liczba π?

Zaczniemy tak, jak zaczyna się każdy dobry wykład matematyczny, to znaczy od definicji.

Co to jest liczba π?

Zaczniemy tak, jak zaczyna się każdy dobry wykład matematyczny, to znaczy od definicji.

$$\pi \neq 3$$

Co to jest liczba π?

Zaczniemy tak, jak zaczyna się każdy dobry wykład matematyczny, to znaczy od definicji.

$$\pi \neq 3$$

$$\pi \neq 3,14$$

Co to jest liczba π?

Zaczniemy tak, jak zaczyna się każdy dobry wykład matematyczny, to znaczy od definicji.

$$\pi \neq 3$$

$$\pi \neq 3,14$$

$$\pi = 3,1415926535897932...?$$

Co to jest liczba π?

Zaczniemy tak, jak zaczyna się każdy dobry wykład matematyczny, to znaczy od definicji.

$$\pi \neq 3$$

$$\pi \neq 3,14$$

$$\pi = 3,141592653589793\ldots?$$

To nie jest definicja!

Definicja

Definicja

Jeżeli L jest obwodem koła, d zaś jego średnicą, to $\frac{L}{d} = \pi$

Skąd π pochodzi?

Starożytni Grecy zauważyli, że stosunek obwodu do średnicy we wszystkich kołach jest taki sam. A przynajmniej bardzo zbliżony (na tyle pozwoliły im pomiary).

Skąd π pochodzi?

Starożytni Grecy zauważyli, że stosunek obwodu do średnicy we wszystkich kołach jest taki sam. A przynajmniej bardzo zbliżony (na tyle pozwoliły im pomiary).

Dziś nie powinno nas to dziwić. Wszak wiemy, że wszystkie koła są figurami podobnymi. Zatem stosunki odpowiednich długości są zachowane.

Najpopularniejsze wzory

Liczba π swą popularność wśród społeczeństwa zawdzięcza obecności we wzorach na pole i obwód koła. Pewnie dlatego, że tego uczy się w szkołach.
Dla pewności przypominamy:

$$P = \pi r^2$$

$$L = 2\pi r$$

Najpopularniejsze wzory

Liczba π swą popularność wśród społeczeństwa zawdzięcza obecności we wzorach na pole i obwód koła. Pewnie dlatego, że tego uczy się w szkołach.
Dla pewności przypominamy:

$$P = \pi r^2$$

$$L = 2\pi r$$

Jak silnie zapadają te wzory w pamięć niech świadczy cytat z Milionerów (tvn):
Pytanie: Pole jakiej figury nigdy nie będzie liczbą całkowitą?
Odpowiedź poprawna: Koła
[z wrocławskiego portalu matematycznego]

Gdzie π zasiada?

Zresztą nie tylko tvn miewa wpadki. Na antenie radia zet pojawiło się stwierdenie, że liczba π jest nieskończona. [z wrocławskiego portalu matematycznego]

Gdzie π zasiada?

Zresztą nie tylko tvn miewa wpadki. Na antenie radia zet pojawiło się stwierdzenie, że liczba π jest nieskończona. [z wrocławskiego portalu matematycznego]
Nieskończony to ma ona co najwyżej ogon (rozwinięcie dziesiętne).

I co więcej jest ono nieokresowe (Johann Lambert 1767 r.). A to już ją kwalifikuje do szerokiego grona liczb niewymiernych.

Gdzie π zasiada?

Zresztą nie tylko tvn miewa wpadki. Na antenie radia zet pojawiło się stwierdzenie, że liczba π jest nieskończona. [z wrocławskiego portalu matematycznego]
Nieskończony to ma ona co najwyżej ogon (rozwinięcie dziesiętne).

I co więcej jest ono nieokresowe (Johann Lambert 1767 r.). A to już ją kwalifikuje do szerokiego grona liczb niewymiernych.
Dzięki dowodowi Ferdinanda Lindemanna od roku 1882 liczba π zasiada w gronie zacnych liczb przestępnych.

Czy liczba π występuje w przyrodzie?

Jest to zasadnicze pytanie. Czy jest ona tylko wymysłem umysłów, czy też tym, co możemy spotkać wokół nas.

Czy liczba π występuje w przyrodzie?

Jest to zasadnicze pytanie. Czy jest ona tylko wymysłem umysłów, czy też tym, co możemy spotkać wokół nas.
Pierwszym kandydatem będzie oczywiście koło.

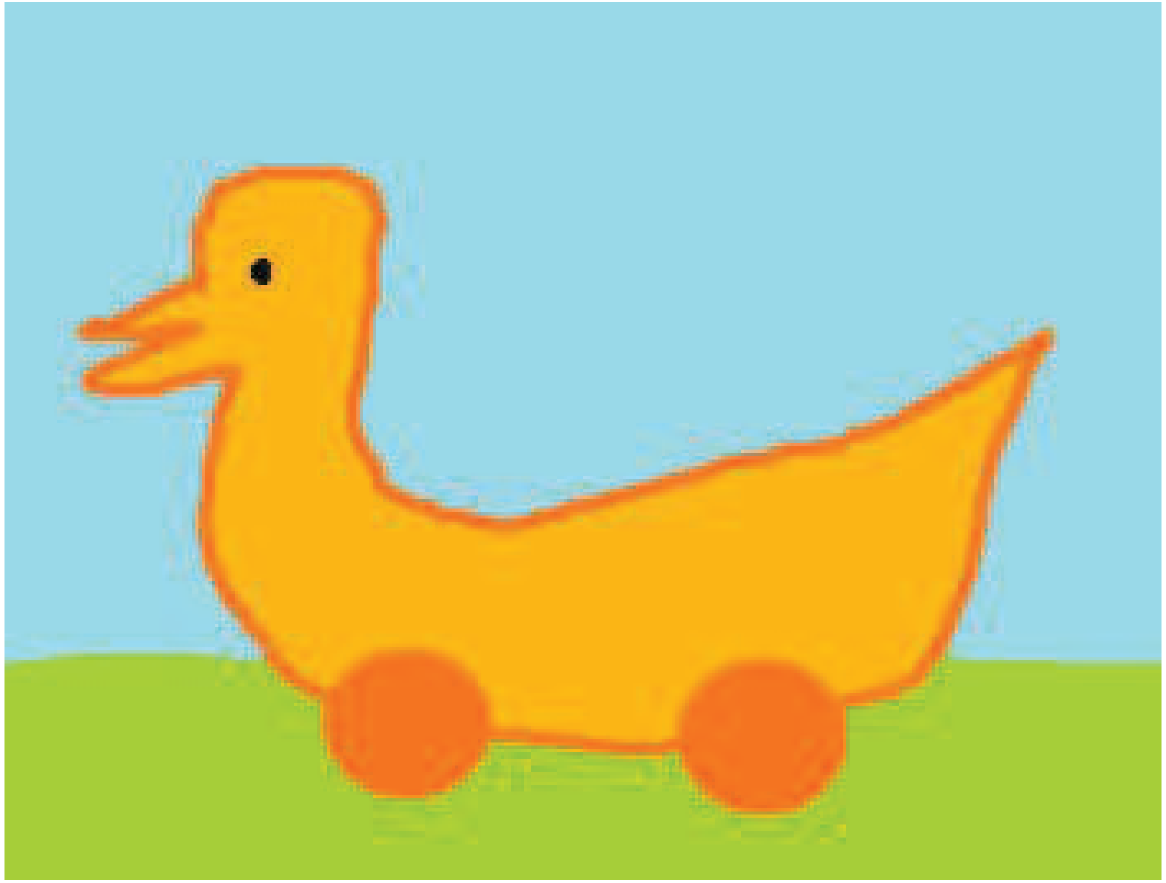
Idealne koło?

Jak możemy się spodziewać trudno o idealne koło w przyrodzie.
Każdy wyrób techniczny ma swoje zniekształcenia.
Koło rowerowe czy samochodowe nie jest kołem matematycznym!

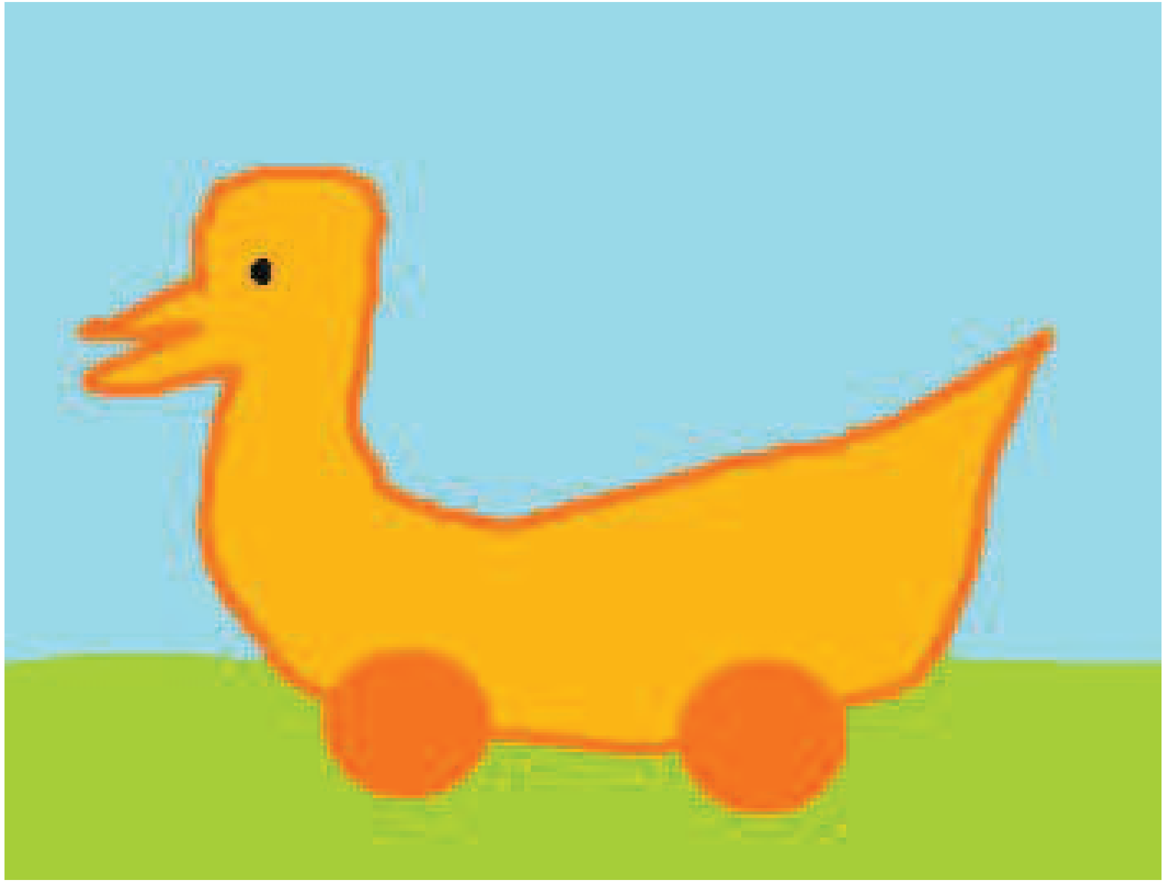
Idealne koło?

Jak możemy się spodziewać trudno o idealne koło w przyrodzie.
Każdy wyrób techniczny ma swoje zniekształcenia.
Koło rowerowe czy samochodowe nie jest kołem matematycznym!
Jednak, gdy odrzucimy nasz rygoryzm, to czy wśród przyrody znajdziemy przykład koła?

Dlaczego zwierzęta nie jeżdżą na kołach?



Dlaczego zwierzęta nie jeżdżą na kołach?



Zapytajcie pana Darwina.

Kula

Okazuje się, że w przyrodzie nawet Kula Ziemska nie jest kulą!

Kula

Okazuje się, że w przyrodzie nawet Kula Ziemska nie jest kulą!

Jej kształt jest zbliżony do paraboloidy obrotowej.

Elipsa

W przeciwieństwie do koła elipsa występuje w przyrodzie.

Elipsa

W przeciwieństwie do koła elipsa występuje w przyrodzie.
Pierwsze prawo Keplera (1571-1630) głosi:

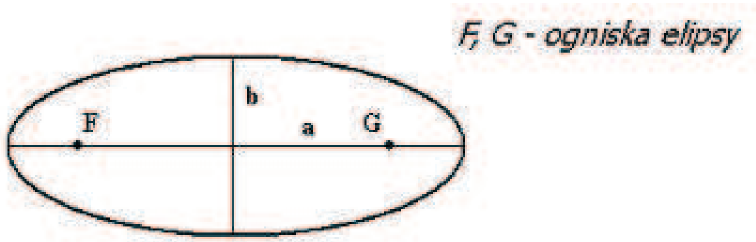
Elipsa

W przeciwieństwie do koła elipsa występuje w przyrodzie.
Pierwsze prawo Keplera (1571-1630) głosi:
Każda planeta Układu Słonecznego porusza się wokół Słońca po elipsie. Słońce leży w jednym z ognisk tej elipsy.

Elipsa

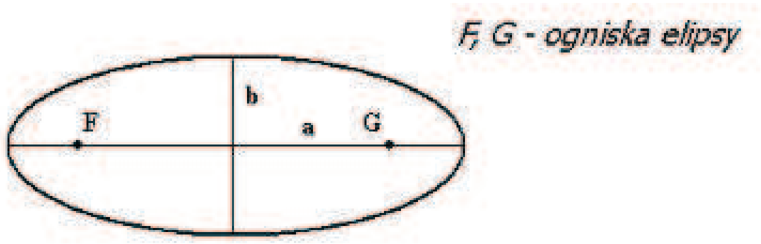
W przeciwieństwie do koła elipsa występuje w przyrodzie.
Pierwsze prawo Keplera (1571-1630) głosi:
Każda planeta Układu Słonecznego porusza się wokół Słońca po elipsie. Słońce leży w jednym z ognisk tej elipsy.
Oczywiście na ruch planet wpływa siła grawitacji innych planet, dlatego ruch nie odbywa się po idealnej elipsie.
Nic w przyrodzie nie jest doskonałe.

Elipsa



Czy elipsa ma coś wspólnego z π?

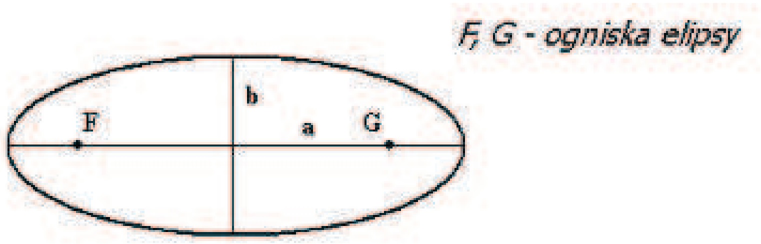
Elipsa



Czy elipsa ma coś wspólnego z π?

$$P = \pi ab$$

Elipsa

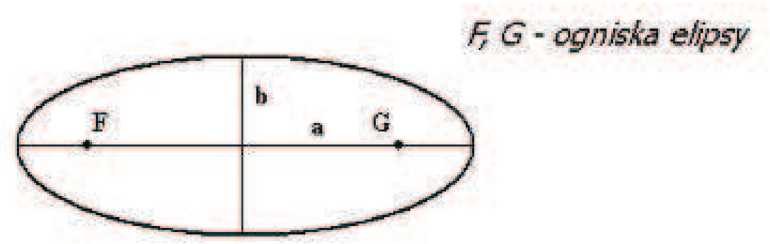


Czy elipsa ma coś wspólnego z π?

$$P = \pi ab$$

$$L = 4a \int_0^1 \frac{\sqrt{1 - \epsilon^2 t^2}}{\sqrt{1 - t^2}} dt$$

Elipsa



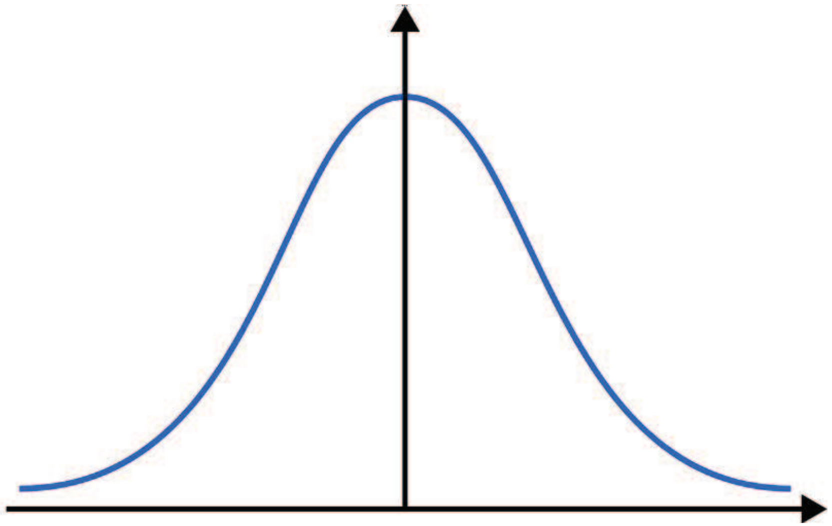
Czy elipsa ma coś wspólnego z π?

$$P = \pi ab$$

$$L = 4a \int_0^1 \frac{\sqrt{1-\epsilon^2 t^2}}{\sqrt{1-t^2}} dt$$

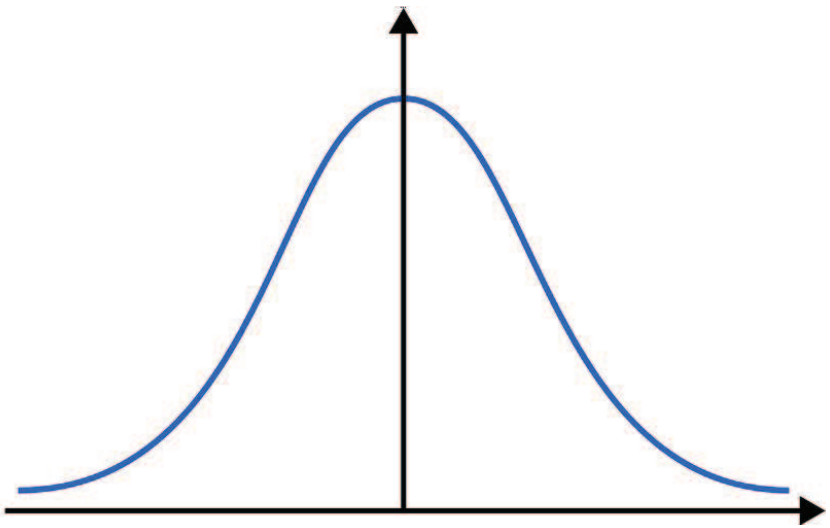
$$L \approx \pi(\frac{3}{2}(a+b) - \sqrt{ab})$$

Krzywa Gaussa



$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

Krzywa Gaussa

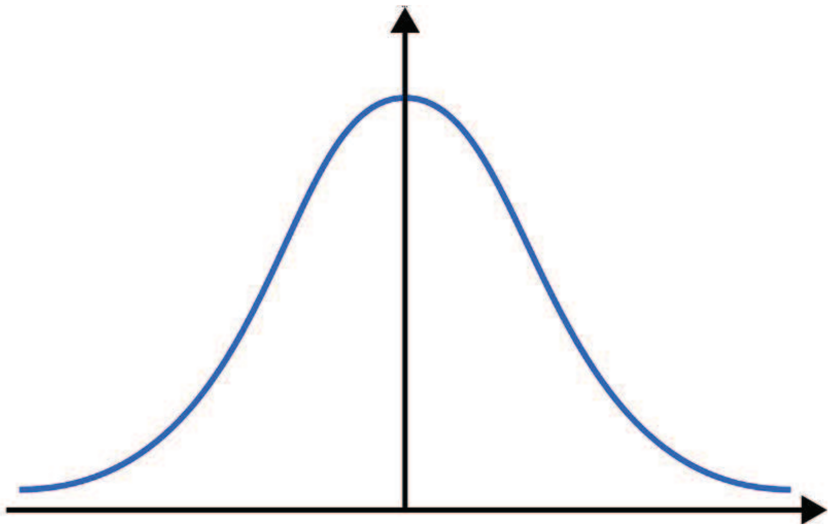


$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

Prościej, dla $\mu = 0$ i $\sigma = 1$:

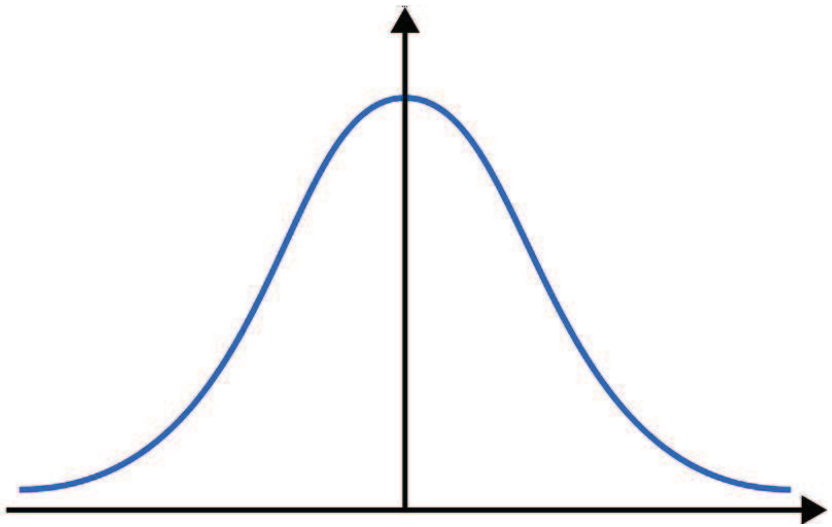
$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-x^2}{2}}$$

Krzywa Gaussa



Hipoteza: cechy w populacji mają rozkład normalny.

Krzywa Gaussa



Hipoteza: cechy w populacji mają rozkład normalny.
Cechy takie jak wzrost, wielkość stopy, inteligencja, ...

Fizycy

Fizycy wolą liczbę e, gdyż liczba π występuje raczej jako stała, zaś e przydaje się w rachunkach różniczkowych etc.

Przyroda czy model?

Czy liczba π występuje w przyrodzie, czy tylko w naszym opisie przyrody (w stworzonym przez nas modelu)?

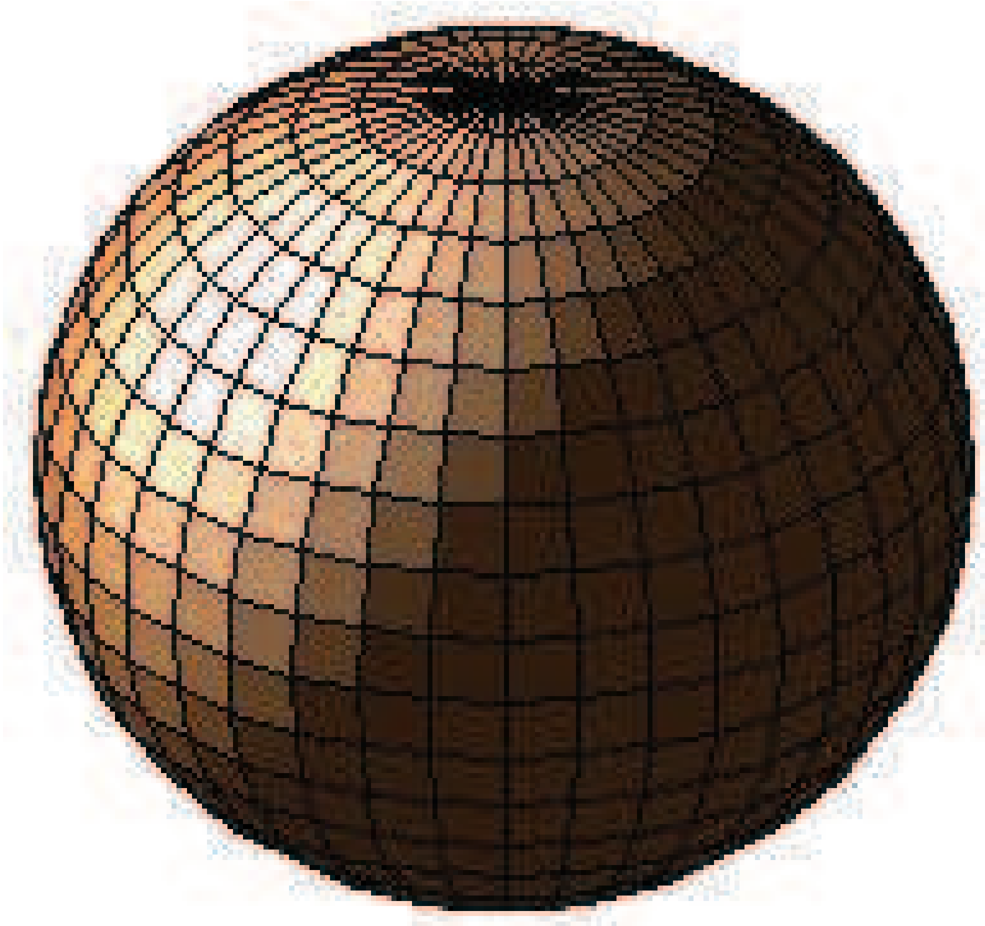
Przyroda czy model?

Czy liczba π występuje w przyrodzie, czy tylko w naszym opisie przyrody (w stworzonym przez nas modelu)?
Są to pytania natury filozoficznej i jako takie je pozostawimy.

Rysunek: Rembrandt, Medytujący filozof

Kula i sfera

Objętość kuli $\frac{4}{3}\pi r^3$.
Powierzchnia kuli $4\pi r^2$.



Najsłynniejszy wzór matematyki

$$e^{i\pi} - 1 = 0$$

Łączy on pięć najważniejszych stałych matematyki

Oczywistość matematyczna

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{-x^2}{2}}\, dx = \sqrt{2\pi}$$

Oczywistość matematyczna

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{-x^2}{2}} dx = \sqrt{2\pi}$$

Dopatrzenie się związku z krzywą Gaussa pozostawiamy uważnym czytelnikom.

Kąty

180^o czy π?

360^o czy 2π?

30^o czy $\frac{\pi}{6}$?

Funkcje trygonometryczne

Okres sinusa i kosinusa - 2π
Okres tangensa i kotangensa - π

Funkcje trygonometryczne

Okres sinusa i kosinusa - 2π
Okres tangensa i kotangensa - π

Funkcje trygonometryczne wykorzystali brytyjscy kolonizatorzy przy obliczaniu wysokości Mount Everestu (1852 r.).

Kwadratura koła

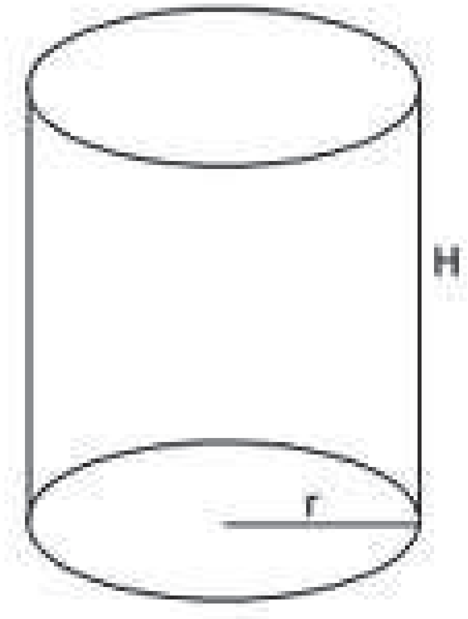
Czy da się skonstruować kwadrat, o polu równym polu danego koła? Jest to jeden z trzech tzw. problemów delijskich.

Kwadratura koła

Czy da się skonstruować kwadrat, o polu równym polu danego koła?
Jest to jeden z trzech tzw. problemów delijskich.
Cyrklem i linijką się nie uda. Ale może z pomocą walca?

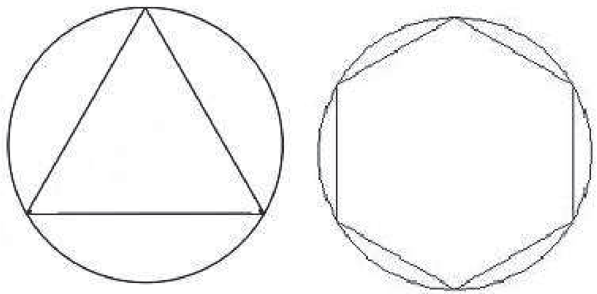
Kwadratura koła

Czy da się skonstruować kwadrat, o polu równym polu danego koła?
Jest to jeden z trzech tzw. problemów delijskich.
Cyrklem i linijką się nie uda. Ale może z pomocą walca?



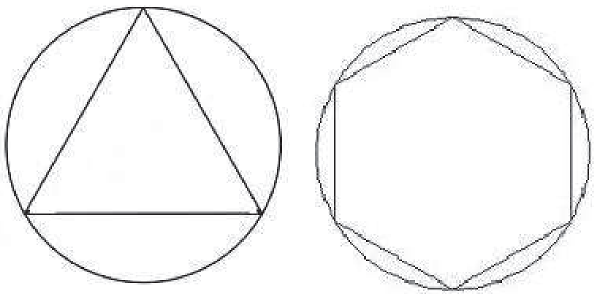
Jak zwykle pierwsi byli starożytni

Przybiżali oni pole koła wpisanymi wielokątami foremnymi.



Jak zwykle pierwsi byli starożytni

Przybiżali oni pole koła wpisanymi wielokątami foremnymi.



Archimedes uzyskuje przybliżenie (na 96-kącie):

$$3\frac{1137}{8069} < \pi < 3\frac{1335}{9347}$$

Historia niecodziennych wzorów

Viete (XVI w.)

$$\frac{2}{\pi} = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}{2} \dots$$

Wzór z naszego plakatu.

Historia niecodziennych wzorów

Ludolf van Ceulen (1610 r.)
Obliczał obwody wpisanych 2^n-kątów.

Historia niecodziennych wzorów

Ludolf van Ceulen (1610 r.)
Obliczał obwody wpisanych 2^n-kątów.

$$\pi = lim_{n\to\infty} 2^n \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + ... + \sqrt{2}}}}$$

Historia niecodziennych wzorów

Ludolf van Ceulen (1610 r.)
Obliczał obwody wpisanych 2^n-kątów.

$$\pi = lim_{n\to\infty} 2^n \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + ... + \sqrt{2}}}}$$

Wylicza 35 miejsc po przecinku (wielokąt o 2^{62} bokach!).
Na jego cześć liczbę π, z rzadka, bo z rzadka, ale jednak, nazywa się ludolfiną.

Historia niecodziennych wzorów

John Wallis (1656 r.)

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 6}{3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 7} \ldots$$

Historia niecodziennych wzorów

John Wallis (1656 r.)

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 6}{3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 7} \ldots$$

Leibniz (1673 r.)

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \ldots$$

Bardzo wolno zbieżny.

Historia niecodziennych wzorów

Euler (XVIII w.)

$$\frac{\pi^2}{6} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{25} + \frac{1}{36} + \ldots$$

Historia niecodziennych wzorów

Euler (XVIII w.)

$$\frac{\pi^2}{6} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{25} + \frac{1}{36} + \ldots$$

$$\frac{4}{\pi} = 1 + \frac{1^2}{2 + \frac{3^2}{2 + \frac{5^2}{2 + \ldots}}}$$

Historia niecodziennych wzorów

$$\pi = 4\left[\arctan\left(\frac{1}{2}\right) + \arctan\left(\frac{1}{5}\right) + \arctan\left(\frac{1}{8}\right)\right]$$

$$\arctan(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \frac{x^9}{9} - \ldots$$

Jest pomocny, gdyż nie trzeba liczyć żadnych pierwiastków.

Era komputerów

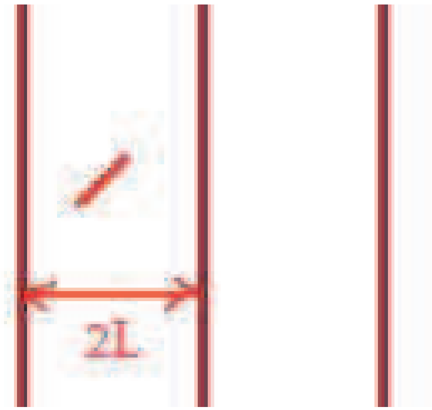
1945-1948 r. A. Smith, J. Wrench wyliczyli 808 miejsc rozwinięcia.
1949 r. 2037 miejsc (ENIAC)
1958 r. 10000 miejsc
1974 r. 1000000 miejsc
...

Era komputerów

1945-1948 r. A. Smith, J. Wrench wyliczyli 808 miejsc rozwinięcia.
1949 r. 2037 miejsc (ENIAC)
1958 r. 10000 miejsc
1974 r. 1000000 miejsc
...
W jakim celu liczymy aż tyle? Według Michała Szurka w obliczeniach 'ziemskich' wystarczą 3-4 cyfry, w 'kosmicznych' 6-7 cyfr.

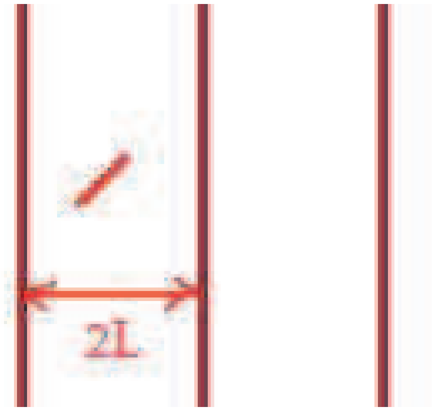
Jeszcze ciekawy przykład

Igła Buffona.
Igłę o długości L rzucamy na podłogę o szerokości desek $2L$.



Jeszcze ciekawy przykład

Igła Buffona.
Igłę o długości L rzucamy na podłogę o szerokości desek $2L$.



$$\pi \approx \frac{n}{k}$$

Ukłony dla

następujące ilustracje pobraliśmy z następujących stron:
saturn blogi.szkolazklasa.pl
elipsa megabajt.net
krzywa gaussa wikipedia.org
Ziemia wikipedia.org
filozof synesthesis.blog.onet.pl
ogon tapeciarnia.pl
sześciokąt 4.dip.pl
trójkąt liczbowo.bloog.pl
walec stereometria.tangens.pl

Dziękujemy za uwagę

$\pi =$

3.1415926535897932384626433832795028841971693993751058209749
445923078164062862089986280348253421170679821480865132823066
470938446095505822317253594081284811174502841027019385211055
596446229489549303819644288109756659334461284756482337867831
652712019091456485669234603486104543266482133936072602491412
737245870066063155881748815209209628292540917153643678925903
600113305305488204665213841469519415116094330572703657595919
5309218611738193261179310511854807446237996274956735188575272
4891227938183011949129833673362440656643086021394946395224737
1907021798609437027705392171762931767523846748184676694051320
005681271452635608277857713427577896091736371787214684409012
2495343014654958537105079227968925892354201995611212902196086
4034418159813629774771309960518707211349999998372978049951059
73173281609631859502445945534690830264252230825334468503526193