

Ćwiczenia 2

1. Kwadratura kwadratu. Pokaż, że mając dane dwa kwadraty o polach P_1, P_2 możemy skonstruować kwadrat o polu $P = P_1 + P_2$.

2. Kwadratury. (*) Jak skonstruować kwadrat, który ma pole równe polu danego prostokąta?

Wskazówka: Narysuj okrąg o średnicy AB równej dłuższemu bokowi prostokąta. Odmierz na tej średnicy odcinek AD równy krótszemu bokowi. Poprowadź przez punkt D prostą prostopadłą do AB . Przetnie ona okrąg w dwóch punktach. Dowolny z nich oznacz C . Pomyśl.

Wywnioskuj:

(a) (*) Jak skonstruować kwadrat, który ma pole równe polu danego trójkąta?

(b) (*) Jak skonstruować kwadrat, który ma pole równe polu danego wielokąta?

(c) Jaki to ma związek z księżycami Hipokratesa?

3. Iniekcja. Udowodnij, że następująca funkcja jest różnowartościowa, bądź wykaż, że nie ma tej własności:

(a) $f(x) = \sin(x)$

(b) $g(x) = x^2 + 3$

(c) $l(x) = \lfloor x \rfloor$

(d) $n(x) = x + 2$

4. Surjekcja. Określ przeciwdziedzinę funkcji tak, aby funkcja była 'na'. Udowodnij, że funkcja jest 'na':

(a) $f(x) = 3$

$g(x) = x + 4$

(c) $h(x) = \pi^x$

(d) $k(x) = \lfloor x \rfloor$

(e) $l(x) = x^2 + 2x + 3$

5. Złożenie. Mamy dane następujące funkcje:

$$f(x) = \pi^x$$

$$g(x) = \pi$$

$$h(x) = \sqrt{x}$$

$$k(x) = 3x + 5$$

Napisz wzór następujących funkcji będących złożeniami, określ ich dziedzinę:

(a) $f \circ g$

(b) $g \circ f$

(c) $h \circ k$

(d) $k \circ h$

(e) $k \circ g$

(f) $f \circ h \circ k$

6. Praca domowa. (a) (*) Czy złożenie funkcji ograniczonych jest funkcją ograniczoną?

Udowodnij.

(b) (**) Czy złożenie bijekcji jest bijekcją? Udowodnij.

(c) (**) Wykaż, że złożenie funkcji rosnących jest funkcją rosnącą.

(d) (**) Kiedy złożenie funkcji okresowych jest funkcją okresową? Udowodnij.

Wskazówka: zwróć uwagę na liczby niewymierne.

(e) (***) Udowodnij, że złożenie funkcji ciągłych jest funkcją ciągłą.