

Jak modelować epidemię?

2. Pochodne i ich własności

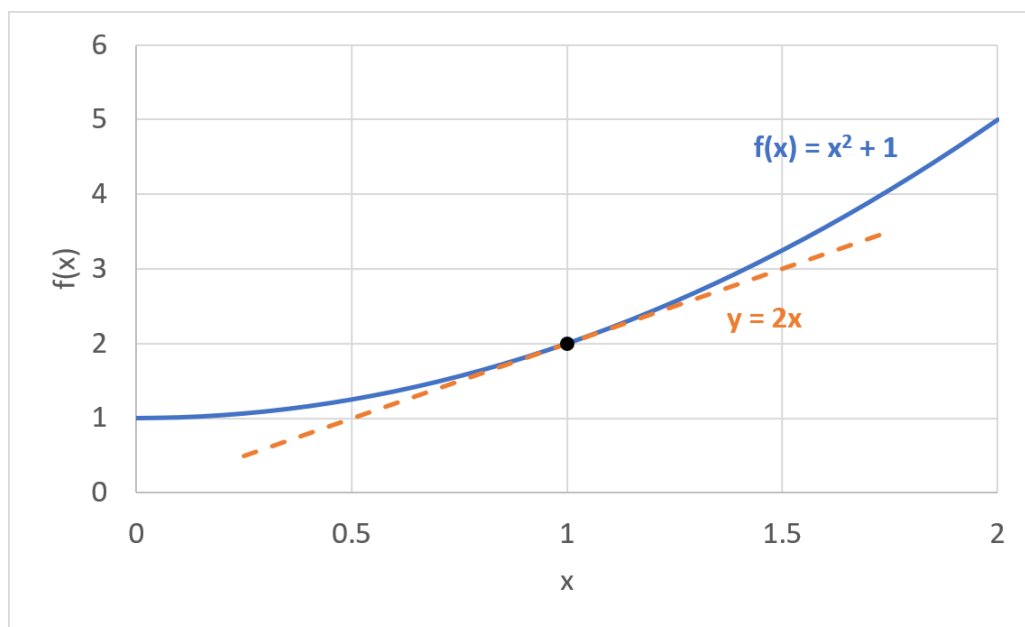
materiały do ćwiczeń

Projekt „Matematyka dla ciekawych świata”
spisali: Piotr Morawiecki i Maria Gokieli
zadania pochodzą z różnych źródeł, w szczególności:
James Stewart, Calculus, Metric version 8E.

kwiecień 2022

1 Podsumowanie wykładów 2 i 3

Pochodna opisuje szybkość wzrostu funkcji. Można ją zdefiniować jako współczynnik kierunkowy stycznej do funkcji w danym punkcie. Na przykład na Rysunku 1 możemy zauważyć, że pochodna funkcji $f(x) = 1 + x^2$ w punkcie $x = 1$ jest przez współczynnik kierunkowej stycznej do wykresu w tym punkcie, który wynosi 2. Przykładając linijkę możesz sprawdzić, że współczynnik ten będzie się zwiększać wraz z x .



Rysunek 1: Ilustracja stycznej do wykresu funkcji $f(x) = 1 + x^2$ w punkcie $x = 1$.

Matematycznie pochodną tę można wyrazić z wykorzystaniem tzw. granicy:

$$\frac{df}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \quad (1)$$

Pochodne można także zapisać jako $f'(x)$ lub $\frac{d}{dx}f(x)$.

Na wykładzie wyprowadziliśmy pochodne następujących funkcji:

- pochodna stałej

$$\frac{d}{dx}a = 0$$

- pochodna funkcji liniowej

$$\frac{d}{dx}(ax + b) = a$$

- pochodna funkcji potęgowej

$$\frac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1}$$

- pochodna funkcji wykładniczej

$$\frac{d}{dx}(e^x) = e^x$$

Gdzie a , b i n to dowolne stałe, natomiast e to liczba Eulera wprowadzona na pierwszym wykładzie. Także wyprowadziliśmy następujące własności pochodnych:

- pochodna funkcji pomnożonej przez stałą a

$$(af(x))' = af'(x)$$

- pochodna sumy dwóch funkcji

$$(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x)$$

- pochodna iloczynu dwóch funkcji

$$(f(x) \cdot g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

- pochodna funkcji złożonej

$$\frac{d}{dx}f(g(x)) = f'(g(x))g'(x)$$

Korzystając z tych własności możemy obliczyć pochodne nawet skomplikowanych funkcji, na przykład:

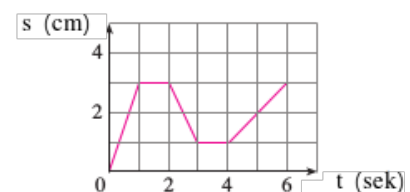
$$\frac{d}{dx}(xe^{x^2}) = \frac{d}{dx}(x)e^{x^2} + x\frac{d}{dx}(e^{x^2}) = e^{x^2} + xe^{x^2}\frac{d}{dx}(x^2) = e^{x^2} + 2x^2e^{x^2}$$

Gdzie kolejno wykorzystaliśmy wzór na pochodną iloczynu dwóch funkcji (w przypadku $x \cdot e^{x^2}$) i na pochodną funkcji złożonej (w przypadku e^{x^2}).

2 Interpretacja geometryczna pochodnej

Zadanie 1

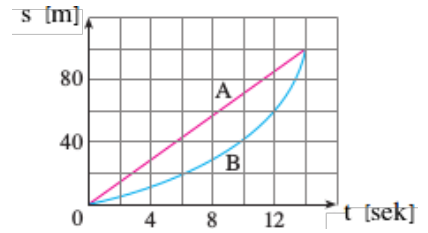
Wykres przedstawia drogę pokonywaną przez ludzika lego, którym bawi się Antek, przesuając go wzdłuż zbudowanego prostego traktu. Kiedy ludzik porusza się w prawo? w lewo? Kiedy stoi? Naszkicuj wykres jego prędkości.



Zadanie 2

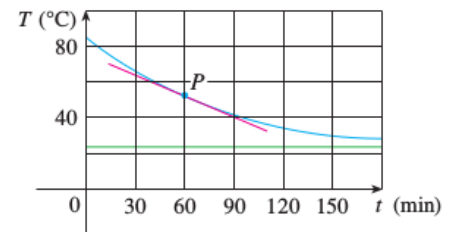
Wykres przedstawia drogę pokonywaną przez dwóch biegaczy A i B.

1. Opisz i porównaj, w jaki sposób biegają biegacze.
2. W którym momencie dzieli ich największa odległość?
3. W którym momencie mają tę samą prędkość? Uzasadnij.



Zadanie 3

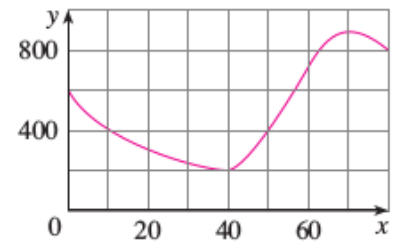
Krysia wyjęła pieczeń z piekarnika nagrzanego do 85°C i postawiła go na stole w pokoju o temperaturze 24°C . Wykres przedstawia proces nieuchronnego stygnięcia pieczeni do temperatury pokojowej. Oszacuj prędkość stygnięcia pieczeni po godzinie, odczytując nachylenie stycznej.



Zadanie 4

Podany jest wykres funkcji f .

1. Jak jest średnie tempo zmiany funkcji f na przedziale $[20, 60]$?
2. Wskaż przedział, na którym średnie tempo zmiany funkcji wynosi 0.
3. Na którym przedziale średnie tempo zmiany funkcji jest większe, $[40, 60]$ czy $[40, 70]$?
4. Oblicz $\frac{f(40) - f(10)}{40 - 10}$. Co ta wartość oznacza geometrycznie, na wykresie?



Zadanie 5

Dla funkcji f z poprzedniego zadania: ile może wynosić $f'(50)$? Czy $f'(10) > f'(30)$?

Czy $f'(60) > \frac{f(80) - f(40)}{80 - 40}$? Wytłumacz, narysuj.

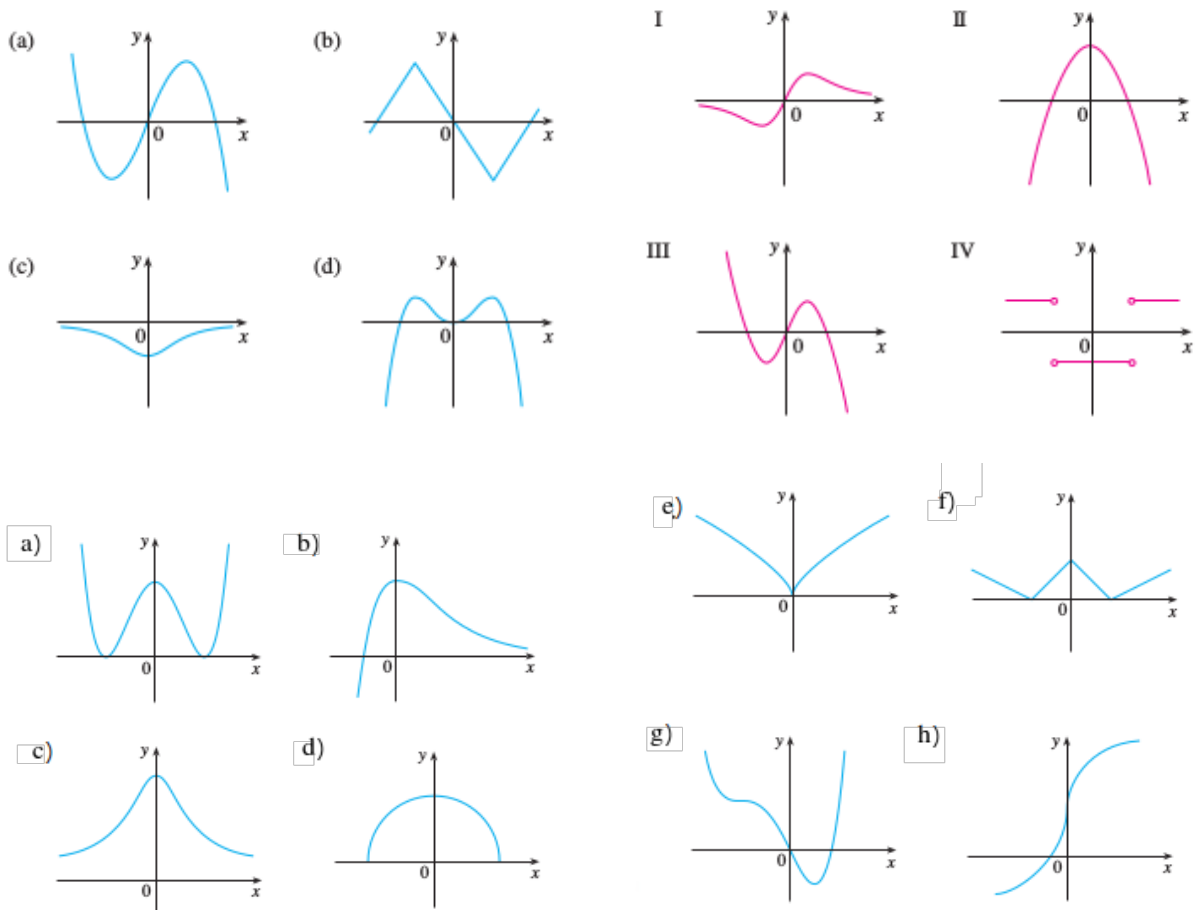
3 Pochodna jako funkcja

Zadanie 6

Dopasuj wykresy funkcji (a)-(d) do wykresów ich pochodnych I-IV.

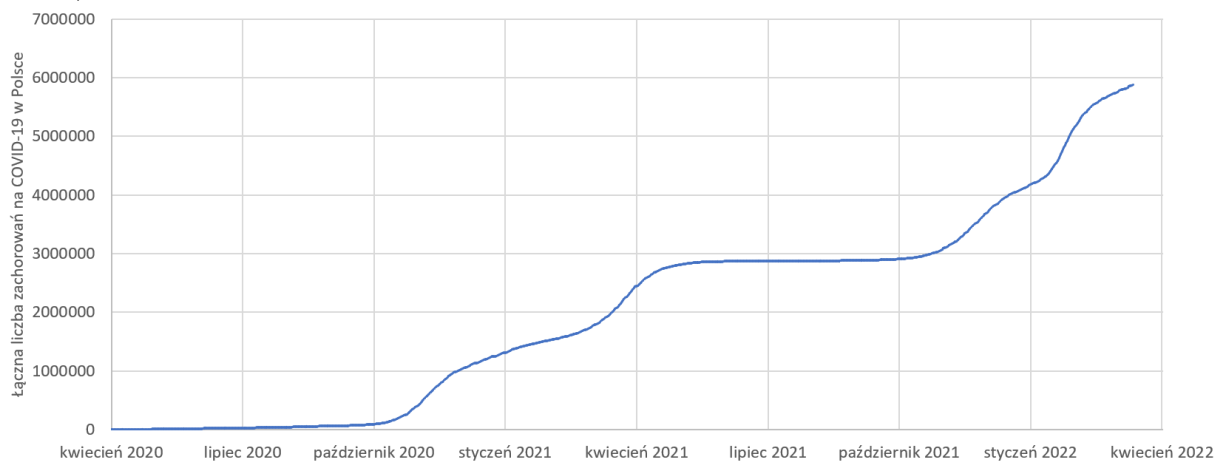
Zadanie 7

Narysuj wykresy pochodnych danych funkcji rysując wcześniej kilka stycznych do ich wykresów. Zaczynij od wyznaczenia miejsc, gdzie pochodna wynosi zero.



Zadanie 8

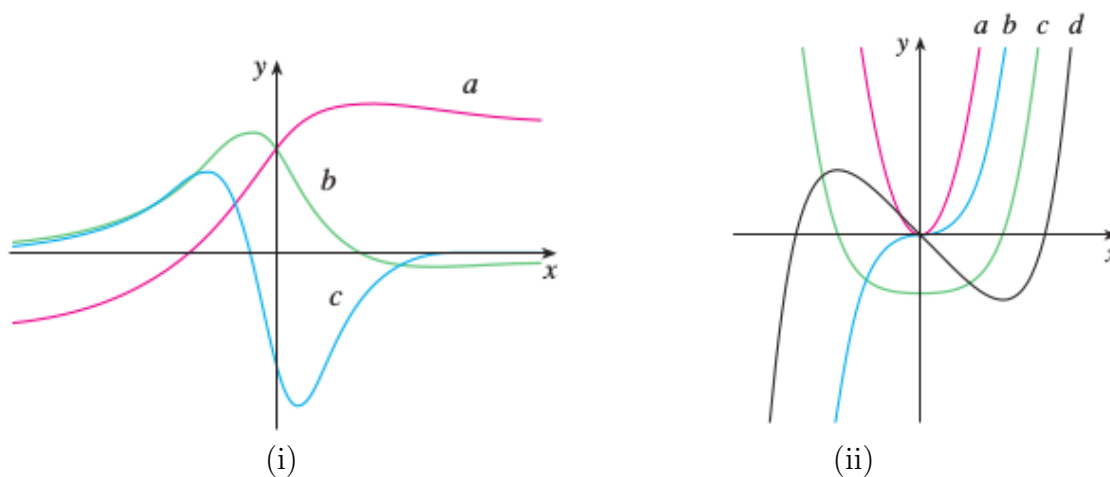
Poniższy wykres przedstawia łączną liczbę zachorowań w Polsce od początku pandemii jako funkcję w czasie, $N(t)$. Naszkicuj wykres pochodnej $\frac{dN}{dt}$ (nie musisz umieszczać osi na osi pionowej). Co obserwujesz? Jaka jest interpretacja tej wielkości?



Kolejne pochodne jako funkcje

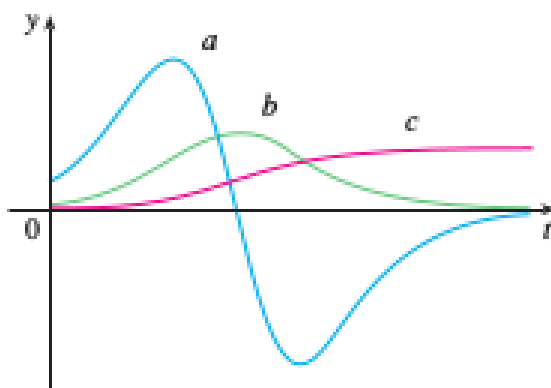
Zadanie 9

- Wykres przedstawia wykres funkcji f , f' , f'' . Która jest która? Wyjaśnij dlaczego.
- Wykres przedstawia wykres funkcji f , f' , f'' , f''' . Która jest która? Wyjaśnij dlaczego.



Zadanie 10

Wykres przedstawia drogę przebytą przez pewien samochód, jego prędkość i przyspieszenie. Co jest czym? Wyjaśnij dlaczego.



4 Obliczanie pochodnych funkcji

Zadanie 11

Położenie ciała poruszającego się w ruchu jednostajnie przyspieszonym jest wyrażona jako następująca funkcja czasu:

$$x(t) = x_0 + v_0 t + \frac{at^2}{2}$$

gdzie x_0 , v_0 i a to pewne stałe parametry.

Oblicz prędkość ciała jako pochodną położenia $v = \frac{dx}{dt}$ oraz przyspieszenie ciała jako pochodną prędkości $a = \frac{dv}{dt}$. Co obserwujesz? Jaka jest interpretacja parametrów występujących w równaniu.

Zadanie 12

Oblicz pochodną $\frac{df}{dx}$ następujących funkcji:

1. $f(x) = 3x^3$

2. $f(x) = x^3 - x^2$

3. $f(x) = 3xe^x$

4. $f(x) = e^{x^3-x^2}$

5. $f(x) = 2\sqrt{x}$

Wskazówka: $\sqrt[n]{x}$ można zapisać jako $x^{1/n}$

6. $f(x) = x^2\sqrt{e^x + \frac{1}{x}}$

7. $f(x) = 2^x$ (*)

Wskazówka: Spróbuj przekształcić 2 w potęgę o podstawie e

8. $f(x) = \ln x$ (*)

Wskazówka: Zastanów jaka jest zależność między funkcją $f(x) = \ln x$ i $g(x) = e^x$. Spróbuj wykorzystać definicję pochodnej (lub jej geometryczną interpretację), żeby znaleźć zależność między pochodną $f'(x)$ i $g'(x)$.

(*) zadania dla ambitnych

Zadanie 13

Wyprowadź wzór na pochodną ilorazu funkcji:

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{g(x)f'(x) + f(x)g'(x)}{g^2(x)}$$

Wskazówka: Wykorzystaj wcześniej poznane własności pochodnych.

Zadanie 14

W jednym z zadań z poprzednich zajęć dokonaliśmy obserwacji, że liczbę e można zapisać przy pomocy nieskończonej sumy jako:

$$e = \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \dots$$

Zauważyliśmy, że kolejne wyrazy dają coraz mniejszy wkład do sumy. Co ciekawe funkcję $f(x) = e^x$ można zapisać w podobny sposób jako następujący nieskończony wielomian:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \dots$$

Wykorzystaj tę postać funkcji wykładniczej, żeby pokazać, że $\frac{d}{dx}e^x = e^x$.

Zadanie 15 – rozpad promieniotwórczy

Zmianę liczby pierwiastków promieniotwórczych w czasie opisuje funkcja wykładnicza:

$$n(t) = N_0 e^{-\lambda t}$$

gdzie N_0 to początkowa liczba pierwiastków, a λ to tzw. stała rozpadu promieniotwórczego.

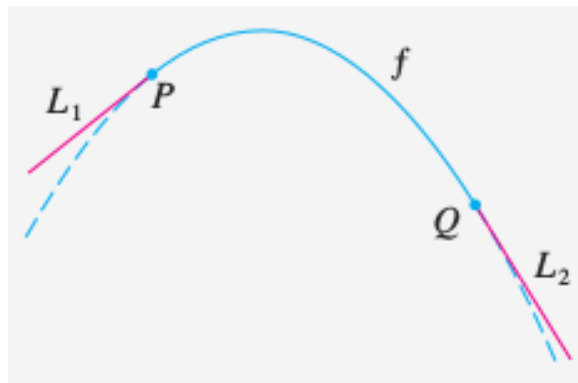
1. Oblicz pochodną funkcji $n'(t)$ i spróbuj ją wyrazić za pomocą $n(t)$. Jak można otrzymane w ten sposób równanie objaśnić?
2. Uran ^{238}U podczas rozpadu promieniotwórczego alfa przemienia się w tor ^{232}Th , który w dużo krótszym czasie ulega rozpadowi do radu ^{228}Ra . Jego ilość w czasie można przybliżyć funkcją:

$$n(t) = \frac{a}{\lambda} + b e^{-\lambda t}$$

Gdzie a i b to pewne stałe. Oblicz pochodną funkcji $n'(t)$ i spróbuj ją wyrazić za pomocą $n(t)$. Jaką interpretację mają poszczególne człony w otrzymanym w ten sposób równanie?

Zadanie 16 – roller-coaster

Jako osobę zorientowaną w matematyce, poproszono Cię o zaprojektowanie trasy kolejki w nowym parku rozrywki obok Twojego domu. Po przejrzeniu fotografii takich tras, decydujesz, że nachylenie przy wznoszeniu wyniesie 0.8, a nachylenie spadku -1.6 . Postanawiasz połączyć te dwa proste odcinki $y = L_1(x)$ i $y = L_2(x)$ kawałkiem paraboli o wzorze $y = f(x) = ax^2 + bx + c$, gdzie x i $f(x)$ mierzone są w metrach. Aby tor był gładki, nie mogą występować nagłe zmiany kierunku, więc chcemy, aby odcinki L_1 i L_2 były styczne do paraboli w punktach przejściowych P i Q (zobacz rysunek).



Aby uprościć równania, postanawiasz umieścić początek układu współrzędnych w punkcie P .

1. (a) Załóżmy, że odległość w poziomie między punktami P i Q wynosi 30 m. Napisz równania, jakie muszą spełniać parametry a , b i c , by tor był gładki w punktach przejściowych (tzn. by odcinki L_1 i L_2 były styczne do paraboli w tych punktach).
(b) Rozwiąż równania z części (a), aby znaleźć wzór na $f(x)$.
(c) Narysuj wykres L_1 , f oraz L_2 , aby sprawdzić, czy przejścia wyglądają płynnie.
(d) Znajdź różnicę wysokości między punktami P i Q .

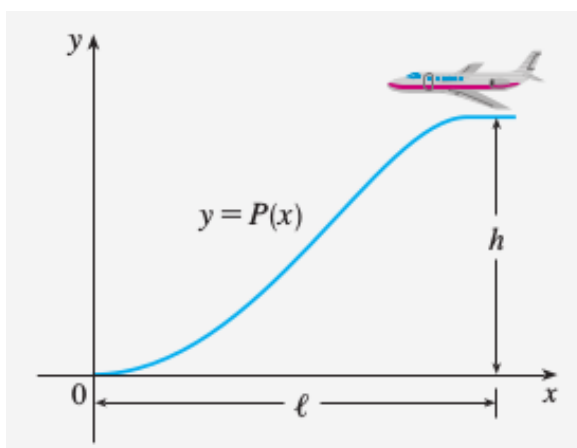
2. Rozwiązanie z punktu 1 może *wyglądać* na gładkie, ale nikt nie *odczuje* tej gładkości, ponieważ funkcja złożona z $L_1(x)$ dla $x \leq 0$, $f(x)$ dla $0 < x < 30$, oraz $L_2(x)$ dla $x \geq 30$ nie ma ciągłej drugiej pochodnej! Zatem pomimo, że nie ma zmian kierunku, odczuwamy zmiany przyspieszenia, czyli szarpnięcia w punktach P i Q . Aby jednak zapisać się pozytywnie w pamięci sąsiadów, postanawiasz poprawić projekt przez użycie funkcji kwadratowej $q(x) = ax^2 + bx + c$ tylko na przedziale $3 < x < 27$, łącząc ją z funkcjami liniowymi za pomocą dwóch funkcji sześciennych:

$$t(x) = kx^3 + lx^2 + mx + n, \quad 0 < x \leq 3, \quad h(x) = px^3 + qx^2 + rx + s \quad 27 \leq x < 30.$$

- (a) Napisz układ równań na 11 niewiadomych, który zapewni, że funkcje i ich dwie pierwsze dwie pierwsze pochodne są zgodne w punktach przejściowych.
- (b) (**) Rozwiąż równania z części (a) z pomocą komputera, aby znaleźć wzory na $q(x)$, $t(x)$, $h(x)$.
- (c) (**) Narysuj wykresy L_1 , t , q , h i L_2 , a następnie porównaj je z wykresem z części 1c.

Zadanie 17 - gdzie pilot powinien rozpocząć lądowanie?

Na rysunku pokazano ścieżkę podejścia do lądowania samolotu. Spełnia ona następujące warunki:



- (i) Gdy zniżanie rozpoczyna się, wysokość samolotu wynosi h , a odległość w poziomie wynosi l , licząc od miejsca zetknięcia z ziemią, które przyjmujemy jako początek układu współrzędnych.
- (ii) Pilot musi utrzymywać stałą prędkość poziomą v przez cały czas zniżania.
- (iii) Wartość bezwzględna przyspieszenia pionowego nie powinna przekraczać stałej k (która jest znacznie mniejsza niż przyspieszenie ziemskie).
- Znajdź wielomian sześcienny $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, który spełnia warunek (i), nakładając odpowiednie warunki na $P(x)$ i $P'(x)$ w punkcie rozpoczęcia opadania i w punkcie lądowania.
 - (*) Korzystając z warunków (ii) i (iii), pokaż, że

$$\frac{6hv^2}{l^2} \leq k.$$

3. Załóżmy, że linia lotnicza postanowiła nie dopuszczać, aby przyspieszenie pionowe samolotu przekraczało $k = 1\,385 \text{ km/h}^2$. Jeśli wysokość przelotowa samolotu wynosi $11\,000 \text{ m}$, a prędkość 480 km/h , w jakiej odległości od lotniska pilot powinien rozpocząć zniżanie?
4. Wykreśl, z pomocą komputera, ścieżkę podejścia, jeśli spełnione są warunki podane w punkcie 3.

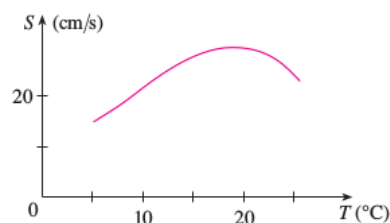
5 Proponowane zadania domowe

Uwaga: Poniższe zadania są proponowane jako zadania domowe, ale prowadzący może wybrać inne zadania jak praca domowa i zaproponować inny rozkład punktacji. Możecie oddać prowadzącemu rozwiązania wszystkich lub tylko części zadań domowych. Maksymalna liczba punktów, którą można zdobyć w każdym tygodniu wynosi 6. Powodzenia!

Zadanie 18 (1 punkty)

Wykres przedstawia wpływ temperatury wody na prędkość osiąganą przez kłuzce (gatunek ryb łososiowatych).

1. Jakie jest znaczenie pochodnej $S'(T)$? W jakich jednostkach będziemy ją mierzyć?
2. Oszacuj $S'(15)$ oraz $S'(25)$, podaj interpretację tych wartości.



Zadanie 19 (2 punkty)

Oblicz pochodną funkcji:

1. $f(x) = x \left(1 + \frac{1}{x^2}\right)$
2. $f(x) = x^2 e^x + 2$

Zadanie 20 (3 punkty)

W pewnych warunkach plotki rozprzestrzeniają się zgodnie z równaniem

$$p(t) = \frac{1}{1 + ae^{-kt}}$$

gdzie $p(t)$ jest częścią (ułamkiem) populacji, która usłyszała plotkę w czasie t , a a i k to pewne stałe dodatnie.

1. Do jakiej liczby dąży $p(t)$, gdy czas t staje się coraz większy i większy? (Inaczej mówiąc: szukamy $\lim_{t \rightarrow \infty} p(t)$). Czy zależy to od stałych a i k ?
2. Z jaką prędkością rozprzestrzenia się plotka?
3. Przyjmij $a = 10$ i $k = 0,5$. Czas t mierzymy w godzinach. Jak długo zajmie plotce dotarcie do 80% populacji?
4. Dla a i k jak wyżej, narysuj wykres funkcji p i na podstawie wykresu oceń, czy Twoje obliczenia są prawidłowe.